

関数論 講義ノート

柿澤 亮平

島根大学学術研究院 教育学系 数学科教育専攻

目次

第 1 章	複素数体と複素平面	1
1.1	複素数体上のノルム	1
1.2	複素数体上の位相	5
1.3	複素平面と Riemann 球面	8
1.4	複素数列の極限	12
第 2 章	複素関数の極限と正則関数	16
2.1	複素関数の極限	16
2.2	複素連続関数	20
2.3	正則関数と Cauchy-Riemann 方程式	22
第 3 章	複素解析関数	24
3.1	複素級数の収束・発散	24
3.2	整級数と複素解析関数	32
3.3	孤立零点と一致の定理	37
第 4 章	初等関数	38
4.1	指数関数と Napier 数	38
4.2	三角関数と円周率	42
4.3	対数関数, 冪関数, 逆三角関数	47
第 5 章	複素線積分と正則関数	55
5.1	複素線積分とその基本性質	55
5.2	閉曲線の回転数・ホモロジー	66
5.3	Cauchy の積分定理・積分公式	69
5.4	正則関数の複素解析性・調和性	74

第1章 複素数体と複素平面

1.1 複素数体上のノルム

● 複素数体

定義 1.1.1. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ を

$$x = (x_1, x_2)$$

のように並べたものを2次ベクトルと言う。また、2次ベクトル全体の集合を

$$\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) ; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

と書く。

定義 1.1.2. 2次ベクトルの相等・加法・乗法を

(1) (相等) $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x = y \Leftrightarrow (x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2))$.

(2) (加法) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) (x, y \in \mathbb{R}^2)$.

(3) (乗法) $xy = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) (x, y \in \mathbb{R}^2)$.

によって定義する。

注意 (スカラー乗法). \mathbb{R}^2 に2次ベクトルの加法・乗法を定義すると、任意の $a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned}(a, 0)(x_1, x_2) &= (ax_1 - 0 \cdot x_2, ax_2 + 0 \cdot x_1) \\ &= (ax_1, ax_2)\end{aligned}$$

が成り立つ。これより、 $a = (a, 0)$ と書く：

$$ax = (ax_1, ax_2).$$

注意 (虚数単位). \mathbb{R}^2 に2次ベクトルの加法・乗法を定義すると、

$$\begin{aligned}(0, 1)^2 &= (0, 1)(0, 1) \\ &= (0^2 - 1^2, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ &= (-1, 0) \\ &= -1\end{aligned}$$

が成り立つ。これより、 $i = (0, 1)$ と書く：

$$i^2 = -1.$$

命題 1.1.1. \mathbb{R}^2 は 2 次ベクトルの加法・乗法について可換体である。つまり、次の (i)–(x) を満たす。

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$ ($x, y, z \in \mathbb{R}^2$).

(ii) $\exists! 0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}^2, x + 0 = x = 0 + x$.

(iii) $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \exists! -x = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2, x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

(iv) $x + y = y + x$ ($x, y \in \mathbb{R}^2$).

(v) $(xy)z = x(yz)$ ($x, y, z \in \mathbb{R}^2$).

(vi) $\exists! 1 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \forall x \in \mathbb{R}^2, x1 = x = 1x$.

(vii) $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \exists! x^{-1} = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$.

(viii) $xy = yx$ ($x, y \in \mathbb{R}^2$).

(ix) $(x + y)z = xz + yz$ ($x, y, z \in \mathbb{R}^2$).

(x) $x(y + z) = xy + xz$ ($x, y, z \in \mathbb{R}^2$).

証明. 省略 (微分積分学 I). □

注意 (減法, 除法). (iii) の $x + (-y)$ を $x - y$ と書き, (vii) の xy^{-1} を $\frac{x}{y}$ と書く.

定義 1.1.3. 2 次ベクトルの加法・乗法が定義された可換体 \mathbb{R}^2 を

$$\mathbb{C} = \{x = x_1 + ix_2; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

と書き, \mathbb{C} の元を**複素数**と言う.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の包含関係

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

注意 (Frobenius の定理). $d = 1, d = 2, d = 4$ のときだけ, d 次ベクトル全体の集合 \mathbb{R}^d が \mathbb{R} 上の**多元体** となるように, d 次ベクトルの加法・乗法を定義できる.

(1) (実数体) $d = 1$ のとき, \mathbb{R} は可換体である.

(2) (複素数体) $d = 2$ のとき, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ は可換体である.

(3) (四元数体) $d = 4$ のとき, $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ は**非可換体**である.

● 複素数体上のノルム・距離

定義 1.1.4. 任意の $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\operatorname{Re}x = x_1, \quad \operatorname{Im}x = x_2$$

をそれぞれ x の**実部** (real part), **虚部** (imaginary part) と言う.

定義 1.1.5. 任意の $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\bar{x} = x_1 - ix_2$$

を x の**共役複素数** と言う.

定義 1.1.6. 任意の $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ に対し,

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

を x の**ノルム** または**絶対値** と言う.

命題 1.1.2.

$$(1) \operatorname{Re}x = \frac{x + \bar{x}}{2} \quad (x \in \mathbb{C}).$$

$$(2) \operatorname{Im}x = \frac{x - \bar{x}}{2i} \quad (x \in \mathbb{C}).$$

$$(3) \bar{\bar{x}} = x \quad (x \in \mathbb{C}).$$

$$(4) |x| = \sqrt{x\bar{x}} = |\bar{x}| \quad (x \in \mathbb{C}).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.1.3.

$$(1) |\operatorname{Re}x| \leq |x| \quad (x \in \mathbb{C}).$$

$$(2) |\operatorname{Im}x| \leq |x| \quad (x \in \mathbb{C}).$$

$$(3) |x| \leq |\operatorname{Re}x| + |\operatorname{Im}x| \quad (x \in \mathbb{C}).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.1.4.

$$(1) \overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y} \quad (x, y \in \mathbb{C}).$$

$$(2) \overline{xy} = \bar{x}\bar{y} \quad (x, y \in \mathbb{C}).$$

$$(3) \overline{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \quad (x, y \in \mathbb{C}, y \neq 0).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.1.5.

(1) $|x + y|^2 = |x|^2 + 2\operatorname{Re}(x\bar{y}) + |y|^2$ ($x, y \in \mathbb{C}$).

(2) $|xy| = |x||y|$ ($x, y \in \mathbb{C}$).

(3) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ ($x, y \in \mathbb{C}, y \neq 0$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 1.1.6. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall x \in \mathbb{C}, (|x| \geq 0) \wedge (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

(ii) (三角不等式) $|x + y| \leq |x| + |y|$ ($x, y \in \mathbb{C}$).

(iii) $|xy| = |x||y|$ ($x, y \in \mathbb{C}$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

定義 1.1.7. 任意の $x, y \in \mathbb{C}$ に対し,

$$d(x, y) = |x - y|$$

を x と y の距離と言う.

命題 1.1.7. (\mathbb{C}, d) は距離空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall x, y \in \mathbb{C}, (d(x, y) \geq 0) \wedge (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$.

(ii) (三角不等式) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ($x, y, z \in \mathbb{C}$).

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ ($x, y \in \mathbb{C}$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

1.2 複素数体上の位相

● 複素数体の開集合・閉集合

定義 1.2.1. 任意の $x \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対し,

$$D_r(x) = \{y \in \mathbb{C} ; |y - x| < r\}$$

を x を中心とする半径 r の開円板と言う.

定義 1.2.2. $x \in \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, A^c を \mathbb{C} に対する A の補集合とする.

(1) $D_r(x) \subseteq A$ を満たす $r > 0$ が存在するとき, x を A の内点と言う. また, A の内点全体の集合を

$$A^i = \{x \in \mathbb{C} ; \exists r > 0, D_r(x) \subseteq A\}$$

と書き, A^i を A の内部 (interior) または開核 (open kernel) と言う.

(2) $D_r(x) \subseteq A^c$ を満たす $r > 0$ が存在するとき, x を A の外点と言う. また, A の外点全体の集合を

$$A^e = \{x \in \mathbb{C} ; \exists r > 0, D_r(x) \subseteq A^c\}$$

と書き, A^e を A の外部 (exterior) と言う.

(3) 任意の $r > 0$ に対して $(D_r(x) \cap A \neq \emptyset) \wedge (D_r(x) \cap A^c \neq \emptyset)$ のとき, x を A の境界点と言う. また, A の境界点全体の集合を

$$A^f = \{x \in \mathbb{C} ; \forall r > 0, (D_r(x) \cap A \neq \emptyset) \wedge (D_r(x) \cap A^c \neq \emptyset)\}$$

と書き, A^f を A の境界 (frontier) と言う.

(4) 任意の $r > 0$ に対して $D_r(x) \cap A \neq \emptyset$ のとき, x を A の触点と言う. また, A の触点全体の集合を

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{C} ; \forall r > 0, D_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

と書き, \bar{A} を A の閉包 (closure) と言う.

注意. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合とする.

(1) $A^i \subseteq A \subseteq \bar{A}$.

(2) $\{A^i, A^f\}$ は \bar{A} の直和分解である. つまり, 次の (i), (ii) を満たす.

(i) $A^i \cup A^f = \bar{A}$.

(ii) $A^i \cap A^f = \emptyset$.

(3) $\{A^i, A^e, A^f\}$ は \mathbb{C} の直和分解である. つまり, 次の (i), (ii) を満たす.

(i) $A^i \cup A^e \cup A^f = \mathbb{C}$.

(ii) $A^i \cap A^e = \emptyset, A^i \cap A^f = \emptyset, A^e \cap A^f = \emptyset$.

注意. 定義 1.2.2(1) の A^i を A^o と書き, 定義 1.2.2(3) の A^f を ∂A と書くことがある.

定義 1.2.3. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合とする.

(1) A が開であるとは, A が $A = A^i$ を満たすことを言う. また, \mathbb{C} の開集合全体の集合を

$$\mathcal{O} = \{U \subseteq \mathbb{C}; U = U^i\}$$

と書き, \mathcal{O} を \mathbb{C} 上の開集合系または位相と言う.

(2) A が閉であるとは, A が $A = \overline{A}$ を満たすことを言う. また, \mathbb{C} の閉集合全体の集合を

$$\mathcal{A} = \{F \subseteq \mathbb{C}; F = \overline{F}\}$$

と書き, \mathcal{A} を \mathbb{C} 上の閉集合系と言う.

例 (\mathbb{C} の開円板). $x_0 \in \mathbb{C}$, $r_0 > 0$ とすると, $D_{r_0}(x_0) = \{x \in \mathbb{C}; |x - x_0| < r_0\}$ は開である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (\mathbb{C} の閉円板). $x_0 \in \mathbb{C}$, $r_0 > 0$ とすると,

$$\overline{D_{r_0}(x_0)} = \{x \in \mathbb{C}; |x - x_0| \leq r_0\}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.2.1. $\mathcal{A} = \{F \subseteq \mathbb{C}; F^c \in \mathcal{O}\}$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合とすると, 次の命題

(1) $A \notin \mathcal{O} \Rightarrow A \in \mathcal{A}$ (開でない \Rightarrow 閉である).

(2) $A \notin \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{O}$ (閉でない \Rightarrow 開である).

は偽である.

例 (空集合, 普遍集合).

(1) $\emptyset \in \mathcal{O} \cap \mathcal{A}$.

(2) $\mathbb{C} \in \mathcal{O} \cap \mathcal{A}$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (\mathbb{C} の円環). $0 < a < b$ とする.

(1) $A = \{x \in \mathbb{C}; a < |x| \leq b\} \notin \mathcal{O} \cup \mathcal{A}$.

(2) $A = \{x \in \mathbb{C}; a \leq |x| < b\} \notin \mathcal{O} \cup \mathcal{A}$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 複素数体の連結集合・コンパクト集合

定義 1.2.4. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合とする.

(1) A が**連結**であるとは, 次の (i), (ii) を満たす \mathbb{C} の開集合 $U, V \subseteq \mathbb{C}$ が存在しないことを言う.

(i) $U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset$.

(ii) $\{U \cap A, V \cap A\}$ は A の直和分解である.

(2) A が**領域**であるとは, A が連結かつ開であることを言う.

定義 1.2.5. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合とする.

(1) A が**有界**であるとは,

$$A \subseteq \overline{D_r(x)}$$

を満たす $x \in \mathbb{C}, r \geq 0$ が存在することを言う.

(2) A が**コンパクト**であるとは, A が有界かつ閉であることを言う.

1.3 複素平面と Riemann 球面

● 複素平面

定義 1.3.1. 任意の $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し,

$$x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

によって定義される $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ を x の極座標と言い,

$$\arg x = \theta$$

を x の偏角 (argument) と言う. $x = 0$ に対しては, $r = 0$ によって定義し, θ は定義しない.

命題 1.3.1.

$$(1) \arg(xy) \equiv \arg x + \arg y \pmod{2\pi} \quad (x, y \in \mathbb{C}, x, y \neq 0).$$

$$(2) \arg \frac{x}{y} \equiv \arg x - \arg y \pmod{2\pi} \quad (x, y \in \mathbb{C}, x, y \neq 0).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 複素数の平方根・ n 乗根

命題 1.3.2. $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ とすると, $z^2 = a + ib$ の根 z は

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right)$$

である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.3.3. $r > 0, \theta \in \mathbb{R}$ とすると, $z^2 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の根 z は

$$z = \sqrt{r} \left\{ \cos \left(\frac{1}{2}\theta + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{1}{2}\theta + k\pi \right) \right\} \quad (k \in \{0, 1\})$$

である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.3.4 (de Moivre の公式). $\theta \in \mathbb{R}$ とすると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.3.5. $r > 0, \theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ とすると, $z^n = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の根 z は

$$z = \sqrt[n]{r} \left\{ \cos \left(\frac{1}{n}\theta + \frac{2k}{n}\pi \right) + i \sin \left(\frac{1}{n}\theta + \frac{2k}{n}\pi \right) \right\} \quad (k \in \{0, 1, \dots, n-1\})$$

である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (1 の n 乗根). $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ とし, $\omega = \cos \frac{2}{n}\pi + i \sin \frac{2}{n}\pi$ とおくと, $z^n = 1$ の根 z は

$$z = \omega^k \quad (k \in \{0, 1, \dots, n-1\})$$

である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 拡張された複素平面

定義 1.3.2. 複素数と無限遠点 ∞ の加法・乗法・除法を

- (1) (加法) $x + \infty = \infty + x = \infty$ ($x \in \mathbb{C}$).
 (2) (乗法) $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ ($x \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $x \neq 0$).
 (3) (除法) $\frac{x}{0} = \infty$ ($x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0$), $\frac{x}{\infty} = 0$ ($x \in \mathbb{C}$).

によって定義する.

定義 1.3.3. 複素数と無限遠点の加法・乗法・除法が定義された \mathbb{C} と ∞ の和を

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

と書き, $\overline{\mathbb{C}}$ を拡張された複素平面と言う.

定義 1.3.4. 任意の $X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$$|X| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$$

を X のノルムまたは絶対値と言い,

$$S^2 = \{X \in \mathbb{R}^3; |X| = 1\}$$

を Riemann 球面と言う.

命題 1.3.6. $N = (0, 0, 1)$ とおく. $\mathbb{C} = \{x = (x_1, x_2, 0); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ とするとき, 任意の $X \in S^2 \setminus \{N\}$ に対し, N, X, x が一直線上にあるための $x \in \mathbb{C}$ の必要十分条件は, x が

$$x_1 = \frac{X_1}{1 - X_3}, \quad x_2 = \frac{X_2}{1 - X_3}$$

を満たすことである.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.3.7. $N = (0, 0, 1)$ とおく. $\mathbb{C} = \{x = (x_1, x_2, 0); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ とするとき, 任意の $x \in \mathbb{C}$ に対し, N, X, x が一直線上にあるための $X \in S^2 \setminus \{N\}$ の必要十分条件は, X が

$$X_1 = \frac{x + \bar{x}}{|x|^2 + 1}, \quad X_2 = \frac{x - \bar{x}}{i(|x|^2 + 1)}, \quad X_3 = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}$$

を満たすことである.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 1.3.5. $N = (0, 0, 1)$ とおく.

$$p_N(X) = x = \begin{cases} \frac{X_1 + iX_2}{1 - X_3} & (X \in S^2 \setminus \{N\}), \\ \infty & (X = N) \end{cases}$$

によって定義される $p_N : S^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ を S^2 から $\overline{\mathbb{C}}$ への立体射影と言う.

注意 (命題 1.3.7). $p_N : S^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ は S^2 から $\bar{\mathbb{C}}$ への全単射であり, p_N の逆 $p_N^{-1} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ は

$$p_N^{-1}(x) = X = \begin{cases} \left(\frac{x + \bar{x}}{|x|^2 + 1}, \frac{x - \bar{x}}{i(|x|^2 + 1)}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right) & (x \in \mathbb{C}), \\ N & (x = \infty) \end{cases}$$

である.

定義 1.3.6. 任意の $x, y \in \bar{\mathbb{C}}$ に対し,

$$d_N(x, y) = |p_N^{-1}(x) - p_N^{-1}(y)|$$

を x と y の距離と言う.

命題 1.3.8.

(1) 任意の $x, y \in \mathbb{C}$ に対して

$$d_N(x, y) = \frac{2|x - y|}{\sqrt{(|x|^2 + 1)(|y|^2 + 1)}}$$

が成り立つ.

(2) 任意の $x \in \mathbb{C}$ に対して

$$d_N(x, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|x|^2 + 1}}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

1.4 複素数列の極限

● 複素数列の収束・発散

定義 1.4.1. $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ を複素数列と言う。このとき、

$$a(n) = a_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

と書き、 a_n を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項と言う。

定義 1.4.2 (ε - N 論法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とする。 $n \rightarrow \infty$ のとき、 a_n が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束するとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し、 $n \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ と書く。

定義 1.4.2 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon).$$

定義 1.4.3 (M - N 論法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とする。 $n \rightarrow \infty$ のとき、 a_n が ∞ に発散するとは、任意の $M > 0$ に対してある $N(M) \in \mathbb{N}$ が存在し、 $n \geq N(M)$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n| > M$$

が成り立つことを言う。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ と書く。

定義 1.4.3 の論理式

$$\forall M > 0, \exists N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N(M) \Rightarrow |a_n| > M).$$

注意. 複素数列の有限個の項を付け加えたり取り除いたりしても、その複素数列の収束・発散には関係しない。

命題 1.4.1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とするとき、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は一意である。

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定義 1.4.4. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とし、 $a(\mathbb{N}) = \{a_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C}$ とおく。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界であるとは、

$$a(\mathbb{N}) \subseteq \overline{D_M(0)}$$

を満たす $M \geq 0$ が存在することを言う。

定義 1.4.4 の論理式

$$\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M.$$

命題 1.4.2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とする.

- (1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である.
(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束し, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ならば, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n| > \frac{1}{2} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 1.4.3 (和・スカラー倍の極限). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列, $c \in \mathbb{C}$ とする.

- (1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ.

- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{ca_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 1.4.4 (積・商の極限). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とする.

- (1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ.

- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束し, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ならば, $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

注意. \mathbb{C} には全順序が存在しないので, 複素数列に対する

- (1) 極限の単調性
(2) はさみうちの原理

は, 命題として存在しない.

● Bolzano-Weierstrass の定理

命題 1.4.5. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は \mathbb{C} に収束する.
- (ii) $\{\operatorname{Re} a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\operatorname{Im} a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は \mathbb{R} に収束する.

さらに, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.4.6. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は \mathbb{C} で有界である.
- (ii) $\{\operatorname{Re} a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\operatorname{Im} a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は \mathbb{R} で有界である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 1.4.5. $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を \mathbb{N} から \mathbb{N} への写像, $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とする.

- (1) n が狭義単調増加であるとは, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $n(k) < n(k+1)$ のことを言う.
- (2) n が狭義単調増加のとき, $a \circ n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ を a の部分列と言う. このとき,

$$a \circ n(k) = a_{n(k)} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad a \circ n = \{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

と書き, $a_{n(k)}$ を $\{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ の一般項と言う.

命題 1.4.7. $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を \mathbb{N} から \mathbb{N} への写像, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とする.

- (1) n が狭義単調増加ならば, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $k \leq n(k)$.
- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の任意の部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 1.4.1 (Bolzano-Weierstrass の定理). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の収束する部分列が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● Cauchy の定理

定義 1.4.6. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とする. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が \mathbb{C} の **Cauchy 列** であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $m, n \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 1.4.6 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, (m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

命題 1.4.8. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は \mathbb{C} の Cauchy 列である.
- (ii) $\{\operatorname{Re} a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\operatorname{Im} a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は \mathbb{R} の Cauchy 列である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.4.9. 複素数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は \mathbb{C} の Cauchy 列である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意 (命題 1.4.9 の対偶). 複素数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Cauchy 列でなければ, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は \mathbb{C} に収束しない.

定理 1.4.2 (Cauchy の定理). 複素数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Cauchy 列ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は \mathbb{C} に収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. \mathbb{C} には全順序が存在しないので, \mathbb{C} に対する

- (1) Dedekind の公理
- (2) 上限公理
- (3) 下限公理
- (4) 単調増加収束公理
- (5) 単調減少収束公理
- (6) Archimedes の公理
- (7) Cantor の公理

は, 命題として存在しない.

第2章 複素関数の極限と正則関数

2.1 複素関数の極限

定義 2.1.1. A を集合とする. $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ を A 上の複素関数と言う.

定義 2.1.2 (ε - δ 論法). $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数とする. $z \rightarrow a$ のとき, $f(z)$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $0 < |z - a| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $z \in A$ に対して

$$|f(z) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \alpha$ と書く.

定義 2.1.2 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall z \in A, (0 < |z - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(z) - \alpha| < \varepsilon).$$

定義 2.1.3 (M - δ 論法). $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数とする. $z \rightarrow a$ のとき, $f(z)$ が ∞ に発散するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $\delta(M) > 0$ が存在し, $0 < |z - a| < \delta(M)$ を満たす任意の $z \in A$ に対して

$$|f(z)| > M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ と書く.

定義 2.1.3 の論理式

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0, \forall z \in A, (0 < |z - a| < \delta(M) \Rightarrow |f(z)| > M).$$

命題 2.1.1. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数とする. $z \rightarrow a$ のとき, $f(z)$ が収束すれば, $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ は一意である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定義 2.1.4. A を集合, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ を A 上の複素関数とし, $f(A) = \{f(x); x \in A\} \subseteq \mathbb{C}$ とおく. f が A で有界であるとは,

$$f(A) \subseteq \overline{D_M(0)}$$

を満たす $M \geq 0$ が存在することを言う.

定義 2.1.4 の論理式

$$\exists M \geq 0, \forall z \in A, |f(z)| \leq M.$$

命題 2.1.2. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数とする. $z \rightarrow a$ のとき,

(1) $f(z)$ が収束すれば, ある $\delta > 0$ が存在し, f は $D_\delta(a)$ で有界である.

(2) $f(z)$ が収束し, かつ $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \neq 0$ ならば, ある $\delta > 0$ が存在し, 任意の $z \in D_\delta(a)$ に対して

$$|f(z)| > \frac{1}{2} \left| \lim_{z \rightarrow a} f(z) \right|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.3 (和・スカラー倍の極限). $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f, g: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数, $c \in \mathbb{C}$ とする.

(1) $z \rightarrow a$ のとき, $f(z), g(z)$ が収束すれば, $f(z) + g(z)$ は収束し,

$$\lim_{z \rightarrow a} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow a} f(z) + \lim_{z \rightarrow a} g(z)$$

が成り立つ.

(2) $z \rightarrow a$ のとき, $f(z)$ が収束すれば, $cf(z)$ は収束し,

$$\lim_{z \rightarrow a} (cf(z)) = c \lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.4 (積・商の極限). $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f, g: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数とする.

(1) $z \rightarrow a$ のとき, $f(z), g(z)$ が収束すれば, $f(z)g(z)$ は収束し,

$$\lim_{z \rightarrow a} (f(z)g(z)) = \lim_{z \rightarrow a} f(z) \lim_{z \rightarrow a} g(z)$$

が成り立つ.

(2) $z \rightarrow a$ のとき, $f(z), g(z)$ が収束し, かつ $\lim_{z \rightarrow a} g(z) \neq 0$ ならば, $\frac{f(z)}{g(z)}$ は収束し,

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow a} f(z)}{\lim_{z \rightarrow a} g(z)}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.5 (合成の極限). $A, B \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f : A \setminus \{a\} \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ $A \setminus \{a\}$, B 上の複素関数とすると,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b$$

となる $b \in B$ が存在し, かつ $w \rightarrow b$ のとき, $g(w)$ が収束すれば, $z \rightarrow a$ のとき, $g \circ f$ は収束し,

$$\lim_{z \rightarrow a} (g \circ f)(z) = \lim_{w \rightarrow b} g(w)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.6. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数, $\alpha \in \mathbb{C}$ とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \alpha$.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \neq a$, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ となる A の任意の点列 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \alpha$$

となる.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 2.1.1 (Cauchy の収束判定法). $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $z \rightarrow a$ のとき, $f(z)$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $0 < |z - a|, |w - a| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $z, w \in A$ に対して

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.7. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $z \rightarrow a$ のとき, $f(z)$ は \mathbb{C} に収束する.

(ii) $z \rightarrow a$ のとき, $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ は \mathbb{R} に収束する.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Re} f(z) + i \lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Im} f(z)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

注意. \mathbb{C} には全順序が存在しないので, 複素関数に対する

(1) 極限の単調性

(2) はさみうちの原理

は, 命題として存在しない.

2.2 複素連続関数

定義 2.2.1. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ を A 上の複素関数とする.

(1) f が $a \in A$ で連続であるとは,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$$

となることを言う.

(2) f が A で連続であるとは, f が任意の $a \in A$ で連続であることを言う.

定義 2.2.1(2) の論理式

$$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(a, \varepsilon) > 0, \forall z \in A, (|z - a| < \delta(a, \varepsilon) \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon).$$

命題 2.2.1 (和・スカラー倍の連続性). $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ を A 上の複素関数, $c \in \mathbb{C}$ とする.

(1) f, g が a で連続ならば, $f + g$ は a で連続であり,

$$\lim_{z \rightarrow a} (f(z) + g(z)) = f(a) + g(a)$$

が成り立つ.

(2) f が a で連続ならば, cf は a で連続であり,

$$\lim_{z \rightarrow a} (cf(z)) = cf(a)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 2.1.3). □

命題 2.2.2 (積・商の連続性). $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ を A 上の複素関数とする.

(1) f, g が a で連続ならば, fg は a で連続であり,

$$\lim_{z \rightarrow a} (f(z)g(z)) = f(a)g(a)$$

が成り立つ.

(2) f, g が a で連続であり, かつ $g(a) \neq 0$ ならば, $\frac{f}{g}$ は a で連続であり,

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 2.1.4). □

命題 2.2.3 (合成の連続性). $A, B \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ A , B 上の複素関数とするとき, f, g がそれぞれ $a, f(a)$ で連続ならば, $g \circ f$ は a で連続であり,

$$\lim_{z \rightarrow a} (g \circ f)(z) = g(f(a))$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 2.1.5). □

命題 2.2.4. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ を A 上の複素関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は a で連続である.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ となる A の任意の点列 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a)$$

となる.

証明. 省略 (命題 2.1.6). □

命題 2.2.5. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ を A 上の複素関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は a で連続である.

(ii) $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ は a で連続である.

証明. 省略 (命題 2.1.7). □

2.3 正則関数と Cauchy-Riemann 方程式

定義 2.3.1. $U \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ を U 上の複素関数とする.

(1) f が $a \in U$ で複素微分可能であるとは,

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \alpha$$

となる $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在することを言う. このとき, $\alpha = f'(a)$ と書き, $f'(a)$ を f の a での複素微分係数と言う.

(2) f が U で複素微分可能または正則であるとは, f が任意の $a \in U$ で複素微分可能であることを言う. このとき, $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ を f の複素導関数と言う.

命題 2.3.1. $U \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開集合, $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ を U 上の複素関数とするとき, f が a で複素微分可能ならば, f は a で連続である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.3.2 (和・スカラー倍の正則性). $U \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開集合, $a \in U$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ を U 上の複素関数, $c \in \mathbb{C}$ とする.

(1) f, g が a で複素微分可能ならば, $f + g$ は a で複素微分可能であり,

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

が成り立つ.

(2) f が a で複素微分可能ならば, cf は a で複素微分可能であり,

$$(cf)'(a) = cf'(a)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.3.3 (積・商の正則性). $U \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開集合, $a \in U$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ を U 上の複素関数とする.

(1) f, g が a で複素微分可能ならば, fg は a で複素微分可能であり,

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

が成り立つ.

(2) f, g が a で複素微分可能であり, かつ $g(a) \neq 0$ ならば, $\frac{f}{g}$ は a で複素微分可能であり,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.3.4 (合成の正則性). $U, V \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開集合, $a \in U$, $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ U, V 上の複素関数とするとき, f, g がそれぞれ $a, f(a)$ で複素微分可能ならば, $g \circ f$ は a で複素微分可能であり,

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 2.3.1. $U \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開集合, $z = x + iy \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ を U 上の複素関数とし,

$$u(x, y) = \operatorname{Re}f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im}f(z) \quad (z = x + iy \in U)$$

とおくと, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は z で複素微分可能である.

(ii) (Cauchy-Riemann 方程式) u, v は (x, y) で全微分可能であり,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

を満たす.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第3章 複素解析関数

3.1 複素級数の収束・発散

● 複素級数

定義 3.1.1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とする.

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

によって定義される $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の複素級数と言い, S_N を $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ の第 N 部分和と言う.

定義 3.1.2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列, $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の複素級数とする.

(1) $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ が $S \in \mathbb{C}$ に収束するとは,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$$

となることを言う. このとき, $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と書き, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ の和と言う.

(2) $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ が ∞ に発散するとは,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \infty$$

となることを言う. このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ と書く.

注意. 複素数列の有限個の項を付け加えたり取り除いたりしても, その複素級数の収束・発散には関係しない.

命題 3.1.1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とするとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ となる.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定理 3.1.1 (Cauchy の収束判定法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $M, N \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $M, N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - \sum_{n=0}^M a_n \right| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

注意. 命題 3.1.1 の逆は成り立たない.

例 (調和級数). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 3.1.2 (和・スカラー倍の級数). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列, $c \in \mathbb{C}$ とする.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ は収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

が成り立つ.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)$ は収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 3.1.3. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は \mathbb{C} に収束する.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ は \mathbb{R} に収束する.

さらに, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• Abel の定理

命題 3.1.4 (部分積分法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると, $M \leq N$ を満たす任意の $M, N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=M}^N a_n(b_{n+1} - b_n) = a_{N+1}b_{N+1} - a_M b_M - \sum_{n=M}^N (a_{n+1} - a_n)b_{n+1}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定理 3.1.2 (Abel の定理). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列で, 次の (i)–(iii) を満たすものとする.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ は収束する.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(iii) $\left\{ \sum_{n=0}^N b_n \right\}_{N \in \mathbb{N}}$ は有界である.

このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ は収束し,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^N b_n \right|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

● 複素級数の絶対収束・条件収束

定義 3.1.3. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とする.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとは, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束することを言う.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束するとは, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束し, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が発散することを言う.

命題 3.1.5 (複素級数の三角不等式). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とするとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束し,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は条件収束し,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 3.1.6 (和・スカラー倍の級数). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列, $c \in \mathbb{C}$ とする.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ は絶対収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

が成り立つ.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)$ は絶対収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 3.1.7 (Cauchy 積の級数). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束す

れば、 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$ は絶対収束し、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II).

□

● 複素級数の絶対収束判定法

命題 3.1.8 (比較判定法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列 ($\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0$) とするとき,

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} < \infty,$$

かつ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 3.1.9 (d'Alembert の収束判定法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とするとき,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 3.1.10 (Cauchy の収束判定法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とするとき,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 3.1.11. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は \mathbb{C} に絶対収束する.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ は \mathbb{R} に絶対収束する.

さらに, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 級数の無条件収束

命題 3.1.12. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を実数列とし, 実数列 $\{a_n^\pm\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$a_n^+ = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n), \quad a_n^- = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義する.

- (1) $a_n = a_n^+ - a_n^-$ ($n \in \mathbb{N}$).
- (2) $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ ($n \in \mathbb{N}$).
- (3) $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- = \max\{0, -a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$).
- (4) $a_n^+ \geq 0$, $a_n^- \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 3.1.13. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を実数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^\pm$ は収束する.

さらに, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 3.1.14. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とし, $\mathcal{F} = \{F \subseteq \mathbb{N}; F \text{ は有限}\}$ とおくと, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.
- (ii) $\left\{ \sum_{n \in F} a_n; F \in \mathcal{F} \right\}$ は有界である.

さらに, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_{n \in F} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定義 3.1.4. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とする.

(1) \mathbb{N} から \mathbb{N} への全単射 $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を \mathbb{N} の置換と言う.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が無条件収束するとは, \mathbb{N} の任意の置換 σ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ が収束することを言う.

定理 3.1.3. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は無条件収束する.

さらに, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば, \mathbb{N} の任意の置換 σ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 3.1.11, 微分積分学 II). □

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の項を置換すると,

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{+,-} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{+,-} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{+,-} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}}_{+,-} + \underbrace{\frac{1}{9} - \frac{1}{10}}_{+,-} + \frac{1}{11} - \cdots \neq \underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}_{+,+,-} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}}_{+,+,-} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}}_{+,+,-} + \cdots$$

となる.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

3.2 整級数と複素解析関数

● 整級数

定義 3.2.1. $a \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とする.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ の形の級数を a を中心とする**整級数**と言う.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ が収束する $z \in \mathbb{C}$ 全体の集合を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ の**収束域**と言う.

定理 3.2.1. $a \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると, 次の (i), (ii) を満たす $0 \leq r \leq \infty$ が一意に存在する.

(i) 任意の $z \in \mathbb{C}$, $|z-a| < r$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ は絶対収束する.

(ii) 任意の $z \in \mathbb{C}$, $|z-a| > r$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ は収束しない.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定義 3.2.2. $a \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とする. 定理 3.2.1 の $0 \leq r \leq \infty$ を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ の**収束半径**と言う.

命題 3.2.1 (d'Alembert の収束判定法). $a \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{r}$$

を満たす $0 \leq r \leq \infty$ が $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ の収束半径である. ただし, $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ とする.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 3.2.2 (Cauchy の収束判定法). $a \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$$

を満たす $0 \leq r \leq \infty$ が $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ の収束半径である. ただし, $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ とする.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 3.2.3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ をそれぞれ $a \in \mathbb{C}$ を中心とする収束半径 $0 \leq r_1, r_2 \leq \infty$ の

整級数とする. $r = \min\{r_1, r_2\}$ とおくと, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-a)^n$ の収束半径は r 以上であり,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \quad (z \in \mathbb{C}, |z-a| < r)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 3.2.4. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ をそれぞれ $a \in \mathbb{C}$ を中心とする収束半径 $0 \leq r_1, r_2 \leq \infty$ の整級数とする. $r = \min\{r_1, r_2\}$ とおくと, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z-a)^n$ の収束半径は r 以上であり,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z-a)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \right) \quad (z \in \mathbb{C}, |z-a| < r)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

● 複素解析関数

定義 3.2.3. $U \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ を U 上の無限回複素微分可能関数とする.

(1) f が $a \in U$ で複素解析的であるとは, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ であり,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad (z \in U, |z-a| < r)$$

が成り立つことを言う. このとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

を f の a を中心とする **Taylor 級数** と言う.

(2) f が U で複素解析的であるとは, f が任意の $a \in U$ で複素解析的であることを言う.

定理 3.2.2. $U \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開集合, $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ を U 上の無限回複素微分可能関数とするとき, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ であり,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad (z \in U, |z-a| < r)$$

が成り立てば, f は $D_r(a)$ で複素解析的である.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

● 項別微積分定理

補題 3.2.1. $a \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とすると, 次の (i)–(iii) の収束半径は等しい.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - a)^{n-1}.$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

$$(iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - a)^{n+1}.$$

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定理 3.2.3 (項別微分定理). $a \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とするとき, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ ならば, f は $D_r(a)$ で複素微分可能であり,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - a)^{n-1} \quad (z \in \mathbb{C}, |z - a| < r)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 3.2.4. $a \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とするとき, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ ならば, f は $D_r(a)$ で無限回複素微分可能であり,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 3.2.5 (項別積分定理). $a \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列とするとき, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ ならば, 任意の $c \in \mathbb{C}$ に対し,

$$F(z) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - a)^{n+1} \quad (z \in \mathbb{C}, |z - a| < r)$$

によって定義される $F : D_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ は f の**原始関数**である. つまり,

$$F'(z) = f(z) \quad (z \in \mathbb{C}, |z - a| < r)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• Abel の定理

定理 3.2.6 (Abel の定理). $a \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を複素数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ の収束半径は $0 < r \leq \infty$ である.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ は収束する.

このとき, 任意の $M > 1$ に対して $S_M(a) = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z-a| < r, \frac{|r-(z-a)|}{r-|z-a|} \leq M \right\}$ とおくと,

$$\lim_{S_M(a) \ni z \rightarrow a+r} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

3.3 孤立零点と一致の定理

定義 3.3.1. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ を A 上の複素関数とする.

(1) $f(a) = 0$ を満たす $a \in A$ を f の**零点**と言う. また, f の零点全体の集合を

$$\text{Ker} f = \{a \in A; f(a) = 0\}$$

と書き, $\text{Ker} f$ を f の**核** (kernel) と言う.

(2) 任意の $n \in \{0, 1, \dots, h-1\}$ ($h \in \mathbb{N}, h \geq 1$) に対して $f^{(n)}(a) = 0, f^{(h)}(a) \neq 0$ を満たす $a \in A$ を f の **h 位の零点**と言う.

命題 3.3.1. $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を D 上の複素解析関数, $a \in \text{Ker} f$ とする.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ に対して $f^{(n)}(a) = 0$ を満たせば, $f = 0$ である.

(2) $f \neq 0$ ならば, $f^{(h)}(a) \neq 0$ を満たす $h \in \mathbb{N}, h \geq 1$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 3.3.2. $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を D 上の複素解析関数, $a \in \text{Ker} f$ とする.

(1) $f \neq 0$ ならば, $h \in \mathbb{N}, h \geq 1, r > 0$ と $D_r(a)$ 上の複素解析関数 $f_h: D_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ で,

$$f(z) = (z - a)^h f_h(z), \quad f_h(z) \neq 0 \quad (z \in D_r(a))$$

を満たすものが存在する.

(2) $f \neq 0$ ならば, a は $\text{Ker} f$ の**孤立点**である. つまり,

$$D_r(a) \cap (\text{Ker} f \setminus \{a\}) = \emptyset$$

を満たす $r > 0$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 3.3.3. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $a \in \mathbb{C}$ とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) a は A の**集積点**である. つまり, 任意の $r > 0$ に対して

$$D_r(a) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

である.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \neq a$, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ となる A の点列 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 3.3.1 (一致の定理). $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $a \in D, f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ を D 上の複素解析関数とすると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \neq a$, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ となる D の点列 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で,

$$f(z_n) = g(z_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たすものが存在すれば, $f(z) = g(z)$ ($z \in D$) である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第4章 初等関数

4.1 指数関数とNapier数

● 指数関数

定義 4.1.1. 次の整級数

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって定義される $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を**指数関数**と言う。

注意 (d'Alembert の収束判定法). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ の収束半径は ∞ である.

命題 4.1.1.

(1) $\exp 0 = 1$.

(2) \exp は \mathbb{C} で複素解析的であり,

$$(\exp z)' = \exp z \quad (z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ.

(3) (加法定理) $\exp(z + w) = \exp z \exp w \quad (z, w \in \mathbb{C})$.

(4) $\exp z \neq 0 \quad (z \in \mathbb{C})$, $\exp x > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$ であり,

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp z} \quad (z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.1.2. \mathbb{C} 上の複素解析関数 $e : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が次の常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} e'(z) = e(z) & (z \in \mathbb{C}), \\ e(0) = 1 \end{cases}$$

を満たせば, $e = \exp$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.1.3. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ は \mathbb{R} で狭義単調増加であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp x}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0$$

となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● Napier 数

定義 4.1.2. $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ を Napier 数 と言う。

定義 4.1.3.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$e^n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ \underbrace{e \cdots e}_{n \text{ 個}} & (n \geq 1), \end{cases} \quad e^{-n} = \frac{1}{e^n}$$

をそれぞれ e の n 乗, $-n$ 乗 と言う。

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対し,

$$e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}, \quad e^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{e^{\frac{m}{n}}}$$

をそれぞれ e の $\frac{m}{n}$ 乗, $-\frac{m}{n}$ 乗 と言う。

命題 4.1.4. 任意の $r \in \mathbb{Q}$ に対して

$$\exp r = e^r$$

が成り立つ。

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.1.5 (e の無理数乗の well-definedness). 任意の $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対し, $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をそれぞれ $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$ となる有理数列とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{r_n} = \exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{s_n}$$

が成り立つ。

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意 (微分積分学 I). \mathbb{Q} は \mathbb{R} で稠密である。

定義 4.1.4. 任意の $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対し, $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ となる有理数列とする。

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{r_n}$$

を e の x 乗 と言う。

命題 4.1.6. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\exp x = e^x$$

が成り立つ。

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.1.5. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

を e の z 乗と言う.

定理 4.1.1. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

4.2 三角関数と円周率

● 三角関数 (正弦, 余弦)

定義 4.2.1. 次の関数

$$\begin{cases} \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} & (z \in \mathbb{C}), \\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} & (z \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

によって定義される $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ余弦関数, 正弦関数と言う.

命題 4.2.1.

$$(1) \begin{cases} \cos 0 = 1, \\ \sin 0 = 0. \end{cases}$$

(2) \cos, \sin は \mathbb{C} で複素解析的であり,

$$\begin{cases} (\cos z)' = -\sin z & (z \in \mathbb{C}), \\ (\sin z)' = \cos z & (z \in \mathbb{C}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} & (z \in \mathbb{C}), \\ \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} & (z \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

が成り立つ.

$$(3) \begin{cases} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z} = 0, \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1. \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \cos(-z) = \cos z & (z \in \mathbb{C}), \\ \sin(-z) = -\sin z & (z \in \mathbb{C}). \end{cases}$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.2.2.

(1) (Euler の公式) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ($z \in \mathbb{C}$).

(2) (de Moivre の公式) $(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz$ ($z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$).

(3) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ($z \in \mathbb{C}$).

$$(4) \text{ (加法定理) } \begin{cases} \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w & (z, w \in \mathbb{C}), \\ \sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w & (z, w \in \mathbb{C}). \end{cases}$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 4.2.3. \mathbb{C} 上の複素解析関数 $c, s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が次の常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} c'(z) = -s(z) & (z \in \mathbb{C}), \\ c(0) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} s'(z) = c(z) & (z \in \mathbb{C}), \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

を満たせば, $c = \cos, s = \sin$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 円周率

命題 4.2.4.

$$(1) \cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4, \sin x > x - \frac{1}{6}x^3 \quad (0 < x < \sqrt{6}).$$

$$(2) \cos x_0 = 0 \text{ を満たす } 0 < x_0 < \sqrt{3} \text{ が一意に存在する.}$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.2.2. $0 < x_0 < \sqrt{3}$ は $\cos x_0 = 0$ を満たすとする. $\pi = 2x_0$ を円周率と言う.

命題 4.2.5.

$$(1) \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0, \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \cos \left(z + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin z \quad (z \in \mathbb{C}), \\ \sin \left(z + \frac{\pi}{2} \right) = \cos z \quad (z \in \mathbb{C}). \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \cos(z + \pi) = -\cos z \quad (z \in \mathbb{C}), \\ \sin(z + \pi) = -\sin z \quad (z \in \mathbb{C}). \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \cos(z + 2\pi) = \cos z \quad (z \in \mathbb{C}), \\ \sin(z + 2\pi) = \sin z \quad (z \in \mathbb{C}). \end{cases}$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.2.6. $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$e(\theta) = e^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

によって定義する.

$$(1) e \text{ は } [0, 2\pi) \text{ から } C = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \text{ への全単射である.}$$

$$(2) \forall \theta \in \mathbb{R}, (e(\theta) = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, \theta = 2n\pi).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.2.3. 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し,

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

によって定義される $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ を z の極座標と言い,

$$\arg z = \theta$$

を z の偏角 (argument) と言う. $z = 0$ に対しては, $r = 0$ によって定義し, θ は定義しない.

注意 (命題 4.2.6). 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し,

$$z = re^{i\theta}$$

を満たす $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ が一意に存在する.

定義 4.2.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(x, y) = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級曲線とし, $C = \{x(t) + iy(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく.

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

を C の長さと言う.

注意 (微分積分学 II). \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級曲線の長さは, パラメータの選択に依存しない.

定理 4.2.1 (弧度法). 任意の $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$A(r, \theta) = \begin{cases} \{re^{it} ; 0 \leq t \leq \theta\} & (\theta \geq 0), \\ \{re^{it} ; \theta \leq t \leq 0\} & (\theta < 0) \end{cases}$$

とおくと,

$$l(A(r, \theta)) = r|\theta|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.2.2 (三角比). 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対し,

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

を満たす $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ が一意に存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 三角関数 (正接)

命題 4.2.7.

- (1) $\forall z \in \mathbb{C}, (\sin z = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, z = n\pi)$.
 (2) $\forall z \in \mathbb{C}, (\cos z = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.2.5. 次の関数

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \left(z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$$

によって定義される $\tan : \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi \rightarrow \mathbb{C}$ を**正接関数**と言う。

命題 4.2.8.

- (1) \tan は $\mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi$ で正則であり,

$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \left(z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$$

が成り立つ。

- (2) $\tan(-z) = -\tan z \quad \left(z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$.
 (3) $\tan : \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi \rightarrow \mathbb{R}$ は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ で狭義単調増加であり,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty$$

となる。

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.2.9.

- (1) $1 + \tan^2 z = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \left(z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$.
 (2) $\tan(z + \pi) = \tan z \quad \left(z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$.
 (3) (加法定理) $\tan(z + w) = \frac{\tan z + \tan w}{1 - \tan z \tan w} \quad \left(z, w \in \mathbb{C}, z, w, z + w \notin \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

4.3 対数関数, 冪関数, 逆三角関数

● 逆関数の基本性質

命題 4.3.1 (逆の正則性). $U \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開集合, $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ を U 上の同相写像とするとき, f が a で複素微分可能であり, かつ $f'(a) \neq 0$ ならば, f^{-1} は $f(a)$ で複素微分可能であり,

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の連続関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) f は I で狭義単調である.
- (ii) f は I から \mathbb{R} への単射である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

● 対数関数

命題 4.3.3. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ は \mathbb{R} で狭義単調増加であり,

$$\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.3.1. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ の逆関数 $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を**対数関数**と言う. つまり, 任意の $x > 0$ に対し,

$$\exp y = x$$

を満たす $y \in \mathbb{R}$ を $y = \log x$ と書き, $\log x$ を x の**対数**と言う.

命題 4.3.4.

(1) $\exp(\log x) = x \ (x > 0)$.

(2) $\log(\exp y) = y \ (y \in \mathbb{R})$.

(3) $\log 1 = 0$.

(4) $\log e = 1$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.5.

(1) (加法定理) $\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2 \ (x_1, x_2 > 0)$.

(2) $\log \frac{1}{x} = -\log x \ (x > 0)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.3.1.

(1) \log は $(0, \infty)$ で微分可能であり,

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $x > 0$ に対して

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.6. $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は \mathbb{R} で狭義単調増加であり,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty$$

となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.3.2. $\exp : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ の逆関数 $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ を対数関数と言う. つまり, 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ に対し,

$$\exp w = z$$

を満たす $w \in \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ を $w = \log z$ と書き, $\log z$ を z の対数と言う.

命題 4.3.7.

- (1) $\exp(\log z) = z$ ($z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$).
- (2) $\log(\exp w) = w$ ($w \in \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$).
- (3) (加法定理) $\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$ ($(r, \theta) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意 (命題 4.2.6). 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ に対し,

$$z = re^{i\theta}$$

を満たす $(r, \theta) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ が一意に存在する.

命題 4.3.8.

- (1) \log は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ で正則であり,

$$(\log z)' = \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$$

が成り立つ.

- (2) $\log(1 + *)$ は $D_1(0)$ で複素解析的であり,

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 冪関数

定義 4.3.3. $a > 0$ とする. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$a^z = \exp(z \log a)$$

を a の z 乗と言う.

命題 4.3.9. $a > 0$ とする.

(1) (加法定理) $a^z a^w = a^{z+w}$ ($z, w \in \mathbb{C}$).

(2) $a^z \neq 0$ ($z \in \mathbb{C}$), $a^x > 0$ ($x \in \mathbb{R}$) であり,

$$a^{-z} = \frac{1}{a^z} \quad (z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.10. $a, b > 0$ とする.

(1) $\log(a^x) = x \log a$ ($x \in \mathbb{R}$).

(2) $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

(3) $(ab)^x = a^x b^x$ ($x \in \mathbb{R}$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.11. $a > 0$ とする.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a^n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ 個}} & (n \geq 1), \end{cases} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

が成り立つ.

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.12. $a > 0$ とする. 任意の $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対し, $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ となる有理数列とすると,

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意 (微分積分学 I). \mathbb{Q} は \mathbb{R} で稠密である.

注意 (a の無理数乗の well-definedness). $a > 0$ とする. 任意の $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対し, $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をそれぞれ $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$ となる有理数列とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$$

が成り立つ.

定義 4.3.4. $\gamma \in \mathbb{C}$ とする. 次の関数

$$x^\gamma = \exp(\gamma \log x) \quad (x > 0)$$

によって定義される $*^\gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ を**冪関数**と言う.

命題 4.3.13. $\gamma \in \mathbb{C}$ とすると, $*^\gamma$ は $(0, \infty)$ で微分可能であり,

$$(x^\gamma)' = \gamma x^{\gamma-1} \quad (x > 0)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.3.5. $a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ とする. 次の関数

$$a^z = \exp(z \log a) \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって定義される $a^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を**冪関数**と言う.

命題 4.3.14. $a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ とすると, a^* は \mathbb{C} で正則であり,

$$(a^z)' = (\log a) a^z \quad (z \in \mathbb{C})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.3.6. 任意の $\gamma \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\binom{\gamma}{n} = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ \frac{\gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-n+1)}{n!} & (n \geq 1) \end{cases}$$

を**二項係数**と言う.

命題 4.3.15. 任意の $\gamma \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \binom{\gamma}{n} + (n+1) \binom{\gamma}{n+1} = \gamma \binom{\gamma}{n}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

定理 4.3.2 (二項定理). $\gamma \in \mathbb{C}$ とすると, $(1 + *)^\gamma$ は $D_1(0)$ で複素解析的であり,

$$(1 + z)^\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma}{n} z^n \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 逆三角関数

命題 4.3.16. \sin は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ で狭義単調増加であり,

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.3.7. $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ の逆関数 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を**逆正弦関数**と言う. つまり, 任意の $-1 \leq x \leq 1$ に対し,

$$\sin y = x$$

を満たす $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ を $y = \arcsin x$ と書き, $\arcsin x$ を x の**逆正弦**と言う.

命題 4.3.17. \cos は $[0, \pi]$ で狭義単調減少であり,

$$\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 4.3.16). □

定義 4.3.8. $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ の逆関数 $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ を**逆余弦関数**と言う. つまり, 任意の $-1 \leq x \leq 1$ に対し,

$$\cos y = x$$

を満たす $0 \leq y \leq \pi$ を $y = \arccos x$ と書き, $\arccos x$ を x の**逆余弦**と言う.

命題 4.3.18.

(1) \arcsin は $(-1, 1)$ で微分可能であり,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つ.

(2) \arccos は $(-1, 1)$ で微分可能であり,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.19. \tan は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ で狭義単調増加であり,

$$\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 4.3.3). □

定義 4.3.9. $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ の逆関数 $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を**逆正接関数**と言う. つまり, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\tan y = x$$

を満たす $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ を $y = \arctan x$ と書き, $\arctan x$ を x の**逆正接**と言う.

命題 4.3.20.

(1) \arctan は \mathbb{R} で微分可能であり,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

(2) \arctan は $(-1, 1)$ で実解析的であり,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第5章 複素線積分と正則関数

5.1 複素線積分とその基本性質

• C^1 級パラメータ曲線

定義 5.1.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $[a, b]$ 上の C^1 級関数とする.

- (1) $z = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線と言う.
- (2) $C = \{z(t) ; a \leq t \leq b\}$ を z の跡と言う.

定義 5.1.2. $k \in \{0, 1\}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$, $z_k = x_k + iy_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とする. z_0 が z_1 に向きを込めて C^1 級同値であるとは, 次の (i), (ii) を満たす $[a_0, b_0]$ 上の C^1 級関数 $\varphi : [a_0, b_0] \rightarrow [a_1, b_1]$ が存在することを言う.

- (i) $\varphi(a_0) = a_1$, $\varphi(b_0) = b_1$, $\varphi'(t) > 0$ ($a_0 \leq t \leq b_0$).
- (ii) $x_0(t) = (x_1 \circ \varphi)(t)$, $y_0(t) = (y_1 \circ \varphi)(t)$ ($a_0 \leq t \leq b_0$).

このとき, $z_0 \sim z_1$ と書く.

命題 5.1.1. \sim は \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線の同値関係である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

- (i) (反射律) $z \sim z$.
- (ii) (対称律) $z_0 \sim z_1 \Rightarrow z_1 \sim z_0$.
- (iii) (推移律) $z_0 \sim z_1, z_1 \sim z_2 \Rightarrow z_0 \sim z_2$.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定義 5.1.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とする.

- (1) $[z] = \{\zeta ; z \sim \zeta\}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級曲線と言う.
- (2) $C = \{z(t) ; a \leq t \leq b\}$ を $[z]$ の跡と言う.

• C^1 級パラメータ曲線の長さ

命題 5.1.2 (曲線の長さの well-definedness). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とすると, 任意の $\zeta \in [z]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $\zeta = \xi + i\eta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$\int_a^b |z'(t)| dt = \int_c^d |\zeta'(u)| du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定義 5.1.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{z(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく.

$$l(C) = \int_a^b |z'(t)| dt$$

を C の長さと言う.

注意 (命題 5.1.2). \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級曲線の長さは, パラメータの選択に依存しない.

● 逆向き曲線, 閉曲線

定義 5.1.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とする.

(1)

$$\hat{z}(t) = z(-t) \quad (-b \leq t \leq -a)$$

によって定義される $\hat{z} : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$ を z の**逆向きパラメータ曲線**と言ひ, $[\hat{z}]$ を $[z]$ の**逆向き曲線**と言う.

(2) $C = \{z(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおくとき, $-C = \{\hat{z}(t) ; -b \leq t \leq -a\}$ を $[z]$ の**跡**と言う.

定義 5.1.6. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とする.

(1) $z(a) = z(b)$ のとき, $[z]$ を \mathbb{C} 上の**向き付けられた C^1 級閉曲線**と言う.

(2) $z(a) = z(b)$, かつ $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ が $[a, b]$ から \mathbb{C} への単射のとき, $[z]$ を \mathbb{C} 上の**向き付けられた C^1 級単純閉曲線**と言う.

● チェイン, サイクル

定義 5.1.7. $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, C_1, \dots, C_n \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級曲線の跡とする. 形式的な和

$$C_1 + \dots + C_n$$

を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級チェインの跡と言う. また, 二つのチェインが等しいとは, 次の (i)–(iii) を有限回施すことによって一方から他方へ移ることを言う.

(i) 曲線の順序を入れ換える.

(ii) 1 曲線を 2 曲線に分割する. 逆に, 一方の終点と他方の始点が一致する 2 曲線を 1 曲線に結合する.

(iii) 向きが互いに逆の 2 曲線を付け加える. 逆に, 向きが互いに逆の 2 曲線を取り除く.

定義 5.1.8. $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, C_1, \dots, C_n \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級閉曲線の跡とする. 形式的な和

$$C_1 + \dots + C_n$$

を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級サイクルの跡と言う.

● 線積分 I

命題 5.1.3 (線積分の well-definedness). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ を C 上の連続スカラー場とすると, 任意の $\xi \in [a, b]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $\xi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して

$$\int_a^b f(x(t))|x'(t)|dt = \int_c^d f(\xi(u))|\xi'(u)|du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 III). □

定義 5.1.9. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ を C 上の連続スカラー場とすると,

$$\int_C f(x)d\sigma = \int_a^b f(x(t))|x'(t)|dt$$

を f の C での線積分と言う.

注意 (命題 5.1.3). \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級曲線での線積分は, パラメータの選択に依存しない.

● 線積分 II

命題 5.1.4 (線積分の well-definedness). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場とすると, 任意の $\xi \in [a, b]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $\xi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して

$$\int_a^b f(x(t)) \cdot x'(t) dt = \int_c^d f(\xi(u)) \cdot \xi'(u) du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 III). □

定義 5.1.10. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場とするとき,

$$\int_C f(x) \cdot dx \left(= \int_C f(x_1, x_2) \cdot (dx_1, dx_2) \right) = \int_a^b f(x(t)) \cdot x'(t) dt$$

を f の C での線積分と言う.

注意 (命題 5.1.4). \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級曲線での線積分は, パラメータの選択に依存しない.

● 線積分 III

命題 5.1.5 (線積分の well-definedness). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ を C 上の連続スカラー場とすると, 任意の $\xi \in [a, b]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $\xi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して

$$\int_a^b f(x(t))x'_i(t)dt = \int_c^d f(\xi(u))\xi'_i(u)du \quad (i \in \{1, 2\})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 III). □

定義 5.1.11. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ を C 上の連続スカラー場とすると,

$$\int_C f(x)dx_i = \int_a^b f(x(t))x'_i(t)dt \quad (i \in \{1, 2\})$$

を f の C での線積分と言う.

注意 (命題 5.1.5). \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級曲線での線積分は, パラメータの選択に依存しない.

● 定積分

定義 5.1.12. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を $[a, b]$ 上の複素連続関数とし,

$$u(t) = \operatorname{Re}f(t), \quad v(t) = \operatorname{Im}f(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

とおく.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

を f の $[a, b]$ での**積分**と言う.

注意. 複素関数の積分に対しても, 積分の基本性質が成り立つ.

命題 5.1.6 (微分積分学の基本定理). $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の有界閉区間, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ を I 上の複素関数とする.

(1) (原始関数) f が I で C^1 級ならば, 任意の $a, b \in I$, $a \neq b$ に対して

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

が成り立つ.

(2) (不定積分) f が I で連続ならば, 任意の $a \in I$ に対し,

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds \quad (t \in I)$$

によって定義される $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ は I で C^1 級であり, $F' = f$ が成り立つ.

証明. 省略 (演習問題).

□

● 複素線積分 I

命題 5.1.7 (複素線積分の well-definedness). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{z(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とすると, 任意の $\zeta \in [z]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $\zeta = \xi + i\eta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$\int_a^b f(z(t))|z'(t)|dt = \int_c^d f(\zeta(u))|\zeta'(u)|du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 5.1.3). □

注意. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{z(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とし,

$$u(x, y) = \operatorname{Re}f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im}f(z) \quad (z = x + iy \in C)$$

とおくと,

$$\int_C f(z)|dz| = \int_C u(x, y)d\sigma + i \int_C v(x, y)d\sigma$$

が成り立つ.

定義 5.1.13. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{z(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とするとき,

$$\int_C f(z)|dz| = \int_a^b f(z(t))|z'(t)|dt$$

を f の C での複素線積分と言う.

注意 (命題 5.1.7). \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級曲線での複素線積分は, パラメータの選択に依存しない.

定義 5.1.14. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $C = C_1 + \cdots + C_n \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級チェイン, $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とする.

$$\int_C f(z)|dz| = \int_{C_1} f(z)|dz| + \cdots + \int_{C_n} f(z)|dz|$$

を f の C での複素線積分と言う.

注意 (命題 5.1.7). \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級チェインでの複素線積分は, パラメータの選択に依存しない.

● 複素線積分 II

命題 5.1.8 (複素線積分の well-definedness). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{z(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とすると, 任意の $\zeta \in [z]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $\zeta = \xi + i\eta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$\int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_c^d f(\zeta(u))\zeta'(u)du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 5.1.4). □

注意. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{z(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とし,

$$u(x, y) = \operatorname{Re}f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im}f(z) \quad (z = x + iy \in C)$$

とおくと,

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u(x, y), -v(x, y)) \cdot (dx, dy) + i \int_C (v(x, y), u(x, y)) \cdot (dx, dy)$$

が成り立つ.

定義 5.1.15. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{z(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とするとき,

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

を f の C での複素線積分と言う.

注意 (命題 5.1.8). \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級曲線での複素線積分は, パラメータの選択に依存しない.

例. $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とし, $C = \{a + re^{it} ; 0 \leq t \leq 2\pi\}$ とおくと, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\int_C (z - a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1), \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.1.16. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $C = C_1 + \dots + C_n \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級チェイン, $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とする.

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz$$

を f の C での複素線積分と言う.

注意 (命題 5.1.8). \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級チェインでの複素線積分は, パラメータの選択に依存しない.

● 複素線積分の基本性質

命題 5.1.9. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{z(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく.

(1) $f, g : C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とすると,

$$\int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz$$

が成り立つ.

(2) $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数, $c \in \mathbb{C}$ とすると,

$$\int_C (cf(z)) dz = c \int_C f(z) dz$$

が成り立つ.

(3) $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とすると,

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 III). □

命題 5.1.10. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z = x + iy : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{z(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく.

(1) (複素線積分の三角不等式) $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とすると,

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|$$

が成り立つ.

(2) (項別複素線積分定理) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を C 上の複素連続関数列とすると, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が C 上の複素関数 $f : C \rightarrow \mathbb{C}$ に C で一様収束すれば, つまり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in C} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

となれば, f は C で連続であり,

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

5.2 閉曲線の回転数・ホモロジー

● 閉曲線の回転数

命題 5.2.1. $C \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線とすると, 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus C$ に対し,

$$\int_C \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2n\pi i$$

を満たす $n \in \mathbb{Z}$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.2.1. $C \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線とする. 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus C$ に対し,

$$n(C, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

を C の z での**回転数**と言う.

例. $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とし, $C = \{a + re^{it}; 0 \leq t \leq 2\pi\}$ とおくと, 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus C$ に対して

$$n(C, z) = \begin{cases} 1 & (z \in D_r(a)), \\ 0 & (z \in D_r(a)^c) \end{cases}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.2.2. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $C = C_1 + \cdots + C_n \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた区分的 C^1 級サイクルとする. 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus C$ に対し,

$$n(C, z) = n(C_1, z) + \cdots + n(C_n, z)$$

を C の z での**回転数**と言う.

● 閉曲線の回転数の基本性質

命題 5.2.2. $C \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線とする.

(1) $n(-C, z) = -n(C, z)$ ($z \in \mathbb{C} \setminus C$).

(2) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ とし, $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\varphi(z) = \alpha z + \beta \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって定義すると,

$$n(\varphi(C), \varphi(z)) = n(C, z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus C)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 5.2.1. $C \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた区分的 C^1 級サイクルとし, $D = \mathbb{C} \setminus C$ とおく. $f: C \rightarrow \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とし, $\varphi: D \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in D)$$

によって定義すると, φ は D の各連結成分で複素解析的であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\frac{\varphi^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (z \in D)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.2.1. $C \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の向き付けられた区分的 C^1 級サイクルとし, $D = \mathbb{C} \setminus C$ とおく.

(1) $n(C, *) : D \rightarrow \mathbb{Z}$ は D の各連結成分で定数である.

(2) $n(C, *) : D \rightarrow \mathbb{Z}$ は D の非有界連結成分で $n(C, *) = 0$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 閉曲線のホモロジー

定義 5.2.3. $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $C_0, C_1 \subseteq D$ を D 上の向き付けられた区分的 C^1 級サイクルとする. C_0 が C_1 に D でホモロジー同値またはホモローグであるとは,

$$n(C_0, z) = n(C_1, z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus D)$$

が成り立つことを言う. このとき, $C_0 \sim C_1 \pmod{D}$ と書く.

命題 5.2.3. $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域とすると, \sim は D 上の向き付けられた区分的 C^1 級サイクルの同値関係である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) (反射律) $C \sim C \pmod{D}$.

(ii) (対称律) $C_0 \sim C_1 \pmod{D} \Rightarrow C_1 \sim C_0 \pmod{D}$.

(iii) (推移律) $C_0 \sim C_1, C_1 \sim C_2 \pmod{D} \Rightarrow C_0 \sim C_2 \pmod{D}$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.2.4. $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域とする.

(1) $C \subseteq D$ を D 上の向き付けられた区分的 C^1 級サイクルとする. C が 0 に D でホモロジー同値またはホモローグであるとは,

$$n(C, z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C} \setminus D)$$

が成り立つことを言う. このとき, $C \sim 0 \pmod{D}$ と書く.

(2) D が \mathbb{C} のホモローグな単連結領域であるとは, D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線が 0 に D でホモロジー同値であることを言う.

5.3 Cauchy の積分定理・積分公式

● スカラー・ポテンシャルと原始関数

補題 5.3.1. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を \mathbb{R}^2 の領域, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ を D 上の連続ベクトル場とすると, 次の (i)–(iii) は互いに同値である.

- (i) (スカラー・ポテンシャル) $\text{grad}\varphi = f$ を満たす D 上の C^1 級スカラー場 $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する.
- (ii) D 上のあるスカラー場 $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し, 任意の $\alpha, \beta \in D$ と, α と β を結ぶ D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級曲線 $C \subseteq D$ に対して

$$\int_C f(x, y) \cdot (dx, dy) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

が成り立つ.

- (iii) D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線 $C \subseteq D$ に対して

$$\int_C f(x, y) \cdot (dx, dy) = 0$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 III). □

定理 5.3.1. $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ を D 上の複素連続関数とすると, 次の (i)–(iii) は互いに同値である.

- (i) (原始関数) $\varphi' = f$ を満たす D 上の正則関数 $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ が存在する.
- (ii) D 上のある複素関数 $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ が存在し, 任意の $\alpha, \beta \in D$ と, α と β を結ぶ D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級曲線 $C \subseteq D$ に対して

$$\int_C f(z) dz = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

が成り立つ.

- (iii) D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線 $C \subseteq D$ に対して

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● Cauchy の積分定理・積分公式 I

定義 5.3.1. $A \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の部分集合, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ を A 上の複素関数とする. f が A で複素微分可能または正則であるとは, 次の (i), (ii) を満たす \mathbb{C} の開集合 $U \subseteq \mathbb{C}$ と U 上の正則関数 $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}$ が存在することを言う.

(i) $U \supseteq A$.

(ii) $\tilde{f}(z) = f(z)$ ($z \in A$).

定義 5.3.2. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ とし, $C_1 = \{x + ic; a \leq x \leq b\}$, $C_2 = \{b + iy; c \leq y \leq d\}$, $C_3 = \{x + id; a \leq x \leq b\}$, $C_4 = \{a + iy; c \leq y \leq d\}$ とおく.

(1) $R = \{x + iy; a < x < b, c < y < d\}$ を \mathbb{C} の開長方形と言う.

(2) $\partial R = C_1 + C_2 - C_3 - C_4$ を R の正の向き境界と言う.

(3) $\bar{R} (= R \cup \partial R)$ を \mathbb{C} の閉長方形と言う.

定理 5.3.2 (Cauchy の積分定理 I). $R \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開長方形, $f: \bar{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を \bar{R} 上の正則関数とすると,

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.3.3. $R \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開長方形, $\zeta \in R$, $f: \bar{R} \setminus \{\zeta\} \rightarrow \mathbb{C}$ を $\bar{R} \setminus \{\zeta\}$ 上の正則関数とすると,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} (z - \zeta) f(z) = 0$$

となれば,

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.3.4 (Cauchy の積分公式 I). $R \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開長方形, $f: \bar{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を \bar{R} 上の正則関数とすると,

$$n(\partial R, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in R)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● Cauchy の積分定理・積分公式 II

定理 5.3.5 (Cauchy の積分定理 II). $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f : D_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ を $D_r(a)$ 上の正則関数とすると, $D_r(a)$ 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線 $C \subseteq D_r(a)$ に対して

$$\int_C f(z)dz = 0$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.3.6. $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f : D_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ を $D_r(a)$ 上の正則関数とするとき,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} (z - \zeta)f(z) = 0$$

となれば, $D_r(a)$ 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線 $C \subseteq D_r(a)$ に対して

$$\int_C f(z)dz = 0$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.3.7 (Cauchy の積分公式 II). $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f : D_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ を $D_r(a)$ 上の正則関数とすると, $D_r(a)$ 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線 $C \subseteq D_r(a)$ に対して

$$n(C, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in D_r(a) \setminus C)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (定理 5.3.4). □

• Cauchy の積分定理・積分公式 III

定理 5.3.8 (Riemann の除去可能定理). $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $a \in D$, $f : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ を $D \setminus \{a\}$ 上の正則関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) D 上の正則関数 $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{C}$ で, $\tilde{f}(z) = f(z)$ ($z \in D \setminus \{a\}$) を満たすものが一意に存在する.

(ii) $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.3.9 (Cauchy の積分定理 III). $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ を D 上の正則関数とすると, D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級サイクル $C \subseteq D$ に対し, $C \sim 0 \pmod{D}$ ならば,

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.3.10 (Cauchy の積分公式 III). $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ を D 上の正則関数とすると, D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級サイクル $C \subseteq D$ に対し, $C \sim 0 \pmod{D}$ ならば,

$$n(C, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in D \setminus C)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 積分路の変形

命題 5.3.1 (積分路の変形 I). $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ を D 上の正則関数とするとき, D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級曲線 $C_0, C_1 \subseteq D$ で, 双方の始点と終点が一致するものに対し, $C_0 - C_1 \sim 0 \pmod{D}$ ならば,

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.2 (積分路の変形 II). $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ を D 上の正則関数とするとき, D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線 $C_0, C_1 \subseteq D$ に対し, $C_0 \sim C_1 \pmod{D}$ ならば,

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

5.4 正則関数の複素解析性・調和性

● 正則関数の複素解析性

定理 5.4.1 (正則関数の複素解析性). $U \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ を U 上の複素関数とするととき, f が U で正則ならば, f は U で複素解析的である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.4.2 (Cauchy の積分公式). $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を D 上の複素解析関数とするととき, D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級サイクル $C \subseteq D$ に対し, $C \sim 0 \pmod{D}$ ならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n(C, z) \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (z \in D \setminus C)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.4.3. $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を D 上の複素連続関数とし,

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) \quad (z = x + iy \in D)$$

とおくと, 次の (i)–(vi) は互いに同値である.

(i) f は D で正則である.

(ii) (Cauchy-Riemann 方程式) u, v は D で全微分可能であり,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \quad ((x, y) \in D)$$

を満たす.

(iii) (原始関数) D の任意のホモロークな単連結部分領域 $D' \subseteq D$ に対し, $\varphi' = f$ を満たす D' 上の正則関数 $\varphi: D' \rightarrow \mathbb{C}$ が存在する.

(iv) D の任意のホモロークな単連結部分領域 $D' \subseteq D$ と, D' 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線 $C \subseteq D'$ に対して

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ.

(v) D の任意のホモロークな単連結部分領域 $D' \subseteq D$ と, D' 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線 $C \subseteq D'$ に対して

$$n(C, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in D' \setminus C)$$

が成り立つ.

(vi) f は D で複素解析的である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 正則関数の調和性

定理 5.4.4 (平均値の定理). $U \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ を U 上の正則関数とすると, $\overline{D_r(z)} \subseteq U$ を満たす任意の $z \in U$, $r > 0$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.4.5 (強最大値原理). $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の領域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を D 上の正則関数とすると, $|f|$ が D のある点で最大ならば, f は D で定数である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.4.6 (弱最大値原理). $D \subseteq \mathbb{C}$ を \mathbb{C} の有界領域, $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ を D 上の正則関数とすると, f が \bar{D} で連続ならば, $|f|$ は ∂D のある点で最大である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.4.7 (Liouville の定理). $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を \mathbb{C} 上の正則関数とすると, f が \mathbb{C} で有界ならば, f は \mathbb{C} で定数である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.4.8 (代数学の基本定理). $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$ ($k \in \{0, 1, \dots, n\}$), $a_n \neq 0$ とし, 多項式 $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって定義するとき, 位数だけ重複させると, n 個の p の \mathbb{C} での零点が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

関連図書

- [1] L. V. アールフォルス, 複素解析, 現代数学社, 1982 年.
- [2] 杉浦 光夫, 解析入門 I(基礎数学), 東京大学出版会, 1980 年.
- [3] 吉田 洋一, 函数論 第 2 版 (岩波全書), 岩波書店, 1965 年.