関数論 演習問題

柿澤 亮平

島根大学学術研究院 教育学系 数学科教育専攻

目 次

第1章　複素数体と複素平面

1.1　複素数体上のノルム

● 複素数体

$\boxed{1}$ 次の複素数の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

(1) $(1+2i)^3$.

(2) $(1+i)^n + (1-i)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

$\boxed{2}$ 次の複素数の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

(1) $\dfrac{5}{-3+4i}$.

(2) $\left(\dfrac{2+i}{3-2i}\right)^2$.

$\boxed{3}$ $z = x + iy$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ とするとき, 次の複素数の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

(1) z^3.

(2) z^4.

$\boxed{4}$ $z = x + iy$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ とするとき, 次の複素数の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

(1) $\dfrac{1}{z^2}$.

(2) $\dfrac{z-a}{z+a}$ $(a \in \mathbb{R})$.

$\boxed{5}$ $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \ ; \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) $\mathcal{C}$ は2次正方行列の加法・乗法について可換体である.

(2) $\mathcal{C}$ 上の複素関数 $f : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ を

$$f(X) = x_1 + ix_2 \qquad \left(X = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \right)$$

によって定義すると, f は $\mathcal{C}$ から $\mathbb{C}$ への体の同型写像である.

● 複素数体上のノルム・距離

$\boxed{6}$ $z \in \mathbb{C}$ とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $z \in \mathbb{R}$.

(ii) $\overline{z} = z$.

$\boxed{7}$ $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とするとき, $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ であるための z の必要十分条件を求めよ.

$\boxed{8}$ $z \in \mathbb{C}$ とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $z^2 \in \mathbb{R}$.

(ii) $\overline{z} = z$ または $\overline{z} = -z$.

$\boxed{9}$ $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とするとき, $z^2 + \dfrac{1}{z^2} \in \mathbb{R}$ であるための z の必要十分条件を求めよ.

$\boxed{10}$ $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{0, 1, \cdots, n\})$, $a_n \neq 0$ とし, 多項式 $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって定義するとき, $p(z) = 0$ の根 $z \in \mathbb{C}$ が存在すれば, $p(\overline{z}) = 0$ であることを証明せよ.

$\boxed{11}$ $a, b, c \in \mathbb{C}$ とし, 多項式 $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$p(z) = az + b\overline{z} + c \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって定義するとき, $p(z) = 0$ の根 $z \in \mathbb{C}$ が存在するための a, b, c の必要十分条件を求めよ.

$\boxed{12}$ 次の複素数のノルムを求めよ.

(1) $i(3+i)(1+2i)(1+i)$.

(2) $\dfrac{(3+4i)(1-2i)}{(1+i)(3-i)}$.

$\boxed{13}$ (中線定理) 次の等式

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{14}$ (極化等式) 次の等式

$$z\overline{w} = \frac{1}{4}(|z+w|^2 - |z-w|^2 + i|z+iw|^2 - i|z-iw|^2) \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{15}$ 次の不等式

$$||z| - |w|| \leq |z-w| \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{16}$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $z_k \in \mathbb{C}$, $|z_k| < 1$ $(k \in \{1, \cdots, n\})$ とするとき,

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$$

を満たす任意の $0 \leq \lambda_k \leq 1$ $(k \in \{1, \cdots, n\})$ に対して

$$|\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_n z_n| < 1$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{17}$ (**指定演習問題 1**) 次の等式・不等式が成り立つための $z, w \in \mathbb{C}$ の必要十分条件を求めよ.

(1) $\left| \dfrac{z - w}{1 - \overline{z}w} \right| < 1.$

(2) $\left| \dfrac{z - w}{1 - \overline{z}w} \right| = 1.$

(3) $\left| \dfrac{z - w}{1 - \overline{z}w} \right| > 1.$

1.2　複素数体上の位相

● 複素数体の開集合・閉集合

$\boxed{1}$ 任意の $A \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ に対して

$$A^i = \{x \in \mathbb{C} \ ; \ \exists r > 0,\ D_r(x) \subseteq A\}$$

とおくとき, $*^i$ が次の (i)–(iv) を満たすことを証明せよ.

(i) $(\mathbb{C})^i = \mathbb{C}$.

(ii) $A^i \subseteq A \ (A \in \mathcal{P}(\mathbb{C}))$.

(iii) $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i \ (A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{C}))$.

(iv) $(A^i)^i = A^i \ (A \in \mathcal{P}(\mathbb{C}))$.

$\boxed{2}$ (Kuratowski の公理) 任意の $A \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ に対して

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{C} \ ; \ \forall r > 0,\ D_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

とおくとき, $\overline{*}$ が次の (i)–(iv) を満たすことを証明せよ.

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(ii) $A \subseteq \overline{A} \ (A \in \mathcal{P}(\mathbb{C}))$.

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \ (A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{C}))$.

(iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A} \ (A \in \mathcal{P}(\mathbb{C}))$.

$\boxed{3}$

$$\mathcal{O} = \{U \subseteq \mathbb{C} \ ; \ U = U^i\}$$

とおくとき, $\mathcal{O}$ が次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ. ただし, $\sharp(*)$ は $*$ の元の個数を表す.

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $\mathbb{C} \in \mathcal{O}$.

(ii) $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C}), \left((\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}) \wedge (\sharp(\mathcal{U}) < \infty) \Rightarrow \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{O} \right)$.

(iii) $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C}), \left(\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{O} \right)$.

$\boxed{4}$

$$\mathcal{A} = \{F \subseteq \mathbb{C} \ ; \ F = \overline{F}\}$$

とおくとき, $\mathcal{A}$ が次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ. ただし, $\sharp(*)$ は $*$ の元の個数を表す.

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathbb{C} \in \mathcal{A}$.

(iii) $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C}), \left((\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}) \wedge (\sharp(\mathcal{A}) < \infty) \Rightarrow \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathcal{A} \right)$.

(iii) $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C}), \left(\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathcal{A} \right)$.

● 複素数体の連結集合・コンパクト集合

$\boxed{5}$ $A \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の連結集合とするとき,

$$A \subseteq B \subseteq \overline{A}$$

を満たす $\mathbb{C}$ の任意の部分集合 $B \subseteq \mathbb{C}$ は連結であることを証明せよ.

$\boxed{6}$ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ の連結集合族とするとき,

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{C}),\ (A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset)$$

ならば, $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ は連結であることを証明せよ.

$\boxed{7}$ $\mathbb{C}$ の有限集合がコンパクトであることを証明せよ.

$\boxed{8}$ $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ のコンパクト集合族とするとき,

$$\sharp(\mathcal{K}) < \infty$$

ならば, $\displaystyle\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ はコンパクトであることを証明せよ. ただし, $\sharp(*)$ は $*$ の元の個数を表す.

1.3 複素平面と Riemann 球面

● 複素平面

$\boxed{1}$ 次の複素数の極座標を求めよ.

(1) $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\dfrac{i}{1+i}$.

$\boxed{2}$ 次の複素数の極座標を求めよ.

(1) $(\sqrt{3}-i)^6$.

(2) $(1+i)^n+(1-i)^n \ (n\in\mathbb{N})$.

$\boxed{3}$ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $\zeta=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ $(r,\rho\geq 0,\ 0\leq\theta,\varphi<2\pi)$ とするとき, 次の複素数

$$\frac{1}{\zeta-z}$$

の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

$\boxed{4}$ $x,y,z\in\mathbb{C}$ とするとき, x, y, z が正三角形となるための x, y, z の必要十分条件は

$$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$$

であることを証明せよ.

$\boxed{5}$ $a\in\mathbb{C}$, $r>0$ とするとき, 次の $\mathbb{C}$ の部分集合

$$A=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z-a|=r\}$$

の概形を図示せよ.

$\boxed{6}$ $a\in\mathbb{R}$, $r>0$ とするとき, 次の $\mathbb{C}$ の部分集合

$$A=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z-a|+|z+a|=2r\}$$

の概形を図示せよ.

$\boxed{7}$ $a,b\in\mathbb{C}$ とするとき, 次の $\mathbb{C}$ の部分集合

$$A=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z-a|=|z-b|\}$$

の概形を図示せよ.

$\boxed{8}$ $a,b\in\mathbb{C}$, $r>0$, $r\neq 1$ とするとき, 次の $\mathbb{C}$ の部分集合

$$A=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z-a|=r|z-b|\}$$

の概形を図示せよ.

● 複素数の平方根・n 乗根

$\boxed{9}$ 次の複素数の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

(1) $i^{\frac{1}{2}}$.

(2) $(-i)^{\frac{1}{2}}$.

$\boxed{10}$ 次の複素数の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

(1) $(1+i)^{\frac{1}{2}}$.

(2) $(1-i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$.

$\boxed{11}$ $a, b, c \in \mathbb{C}$ とするとき, $az^2 + bz + c = 0$ の根 z は

$$z = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a}$$

であることを証明せよ.

$\boxed{12}$ 次の方程式を解け.

(1) $z^2 + 2z + 1 - i = 0$.

(2) $z^2 - 2(1+i)z - 1 + 3i = 0$.

$\boxed{13}$ 次の複素数の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

(1) $i^{\frac{1}{4}}$.

(2) $(-i)^{\frac{1}{4}}$.

$\boxed{14}$ $\theta \in \mathbb{R}$ とするとき, 次の三角関数を $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ.

(1) $\cos 4\theta$, $\sin 4\theta$.

(2) $\cos 5\theta$, $\sin 5\theta$.

$\boxed{15}$ $n \in \mathbb{N}$ とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ に対して

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

が成り立つ.

(2) 任意の $0 < \theta < 2\pi$ に対して

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

が成り立つ.

$\boxed{16}$ 次の問いに答えよ.

(1) $w = z + \dfrac{1}{z}$ とおくとき, z の方程式 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ を w の方程式で表せ.

(2) $\cos\dfrac{2}{5}\pi$, $\sin\dfrac{2}{5}\pi$ の値を求めよ.

$\boxed{17}$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とし, $\omega = \cos\dfrac{2}{n}\pi + i\sin\dfrac{2}{n}\pi$ とおくとき, 次の $\boxed{}$ を埋めよ.

(1) n の倍数でない任意の $h \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{hk} = \boxed{}$$

が成り立つ.

(2) n の倍数でない任意の $h \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-\omega^h)^k = \boxed{}$$

が成り立つ.

$\boxed{18}$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とし, $\omega = \cos\dfrac{2}{n}\pi + i\sin\dfrac{2}{n}\pi$ とおくとき, 次の (1) を証明し, (2) の $\boxed{}$ を埋めよ.

(1) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

が成り立つ.

(2) 任意の $h \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\prod_{k=1}^{n-1} |\omega^h - \omega^k| = \boxed{}$$

が成り立つ.

● 拡張された複素平面

定義. 2 次複素正方行列全体の集合を

$$M_2(\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ ; \ a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

と書く.

定義. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ とし, $\det A = ad - bc$ とおく. A が**複素正則**であるとは, A が $\det A \neq 0$ を満たすことを言う. また, 2 次複素正則行列全体の集合を

$$GL_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \ ; \ \det A \neq 0\}$$

と書く.

定義. 任意の $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ に対し,

$$\varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (z \in \overline{\mathbb{C}})$$

によって定義される $\varphi_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ を $\overline{\mathbb{C}}$ 上の **1 次分数変換**と言う.

$\boxed{19}$ $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$ とするとき, 次の $\mathbb{C}$ の部分集合

$$C = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \ ; \ a|z|^2 + \bar{b}z + b\overline{z} + c = 0\}$$

の概形を図示せよ.

$\boxed{20}$ 次のことを証明せよ.

(1) I を 2 次単位行列とすると,

$$\varphi_I(z) = z \quad (z \in \overline{\mathbb{C}})$$

が成り立つ.

(2) 任意の $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$ に対して

$$\varphi_B \circ \varphi_A(z) = \varphi_{BA}(z) \quad (z \in \overline{\mathbb{C}})$$

が成り立つ.

(3) 任意の $A \in GL_2(\mathbb{C})$ に対し, φ_A は $\overline{\mathbb{C}}$ から $\overline{\mathbb{C}}$ への全単射であり,

$$\varphi_A^{-1}(z) = \varphi_{A^{-1}}(z) \quad (z \in \overline{\mathbb{C}})$$

が成り立つ.

$\boxed{21}$ (円円対応) $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$ とし, $C = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \ ; \ a|z|^2 + \bar{b}z + b\overline{z} + c = 0\}$ とおくとき, 任意の $A \in GL_2(\mathbb{C})$ に対し,

$$\varphi_A(C) = \{w \in \overline{\mathbb{C}} \ ; \ \alpha|w|^2 + \overline{\beta}w + \beta\overline{w} + \gamma = 0\}$$

を満たす $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ が存在することを証明せよ.

1.4 複素数列の極限

● 複素数列の収束・発散

$\boxed{1}$ 任意の $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & (|a| < 1), \\ \infty & (|a| > 1) \end{cases}$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{2}$ $c \in \mathbb{C}$, $0 < |c| < 1$ とし, 複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 \in \mathbb{C}, \quad a_1 \in \mathbb{C}, \quad a_{n+1} - a_n = c(a_n - a_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $a_n - a_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$ を c, a_0, a_1 で表せ.

(2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束することを証明し, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を c, a_0, a_1 で表せ.

$\boxed{3}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とし, 複素数列 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$c_n = \begin{cases} a_m & (n = 2m), \\ b_m & (n = 2m+1) \end{cases}$$

によって定義するとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束し, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(ii) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する.

さらに, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{4}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を収束する複素数列とするとき, $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{5}$ (Cesàro の定理) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を収束する複素数列とするとき, $\left\{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n\geq 1}$ は収束し,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} a_n$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{6}$ $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $\{b_n\}_{n\geq 1}$ を収束する複素数列とするとき, $\left\{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}\right\}_{n\geq 1}$ は収束し,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{7}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$

• Cauchy の定理

$\boxed{8}$ $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, $a \neq 1$ とするとき, $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しないことを証明せよ.

$\boxed{9}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とし, 数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} |a_{k+1} - a_k| \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $m < n$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n - a_m| \leq s_{n-1} - s_{m-1}$$

が成り立つ.

(2) $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}$ の Cauchy 列ならば, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列である.

$\boxed{10}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列で, ある $0 < r < 1$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}|$$

が成り立つものとするとき, 次のことを証明せよ.

(1) $m < n$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \frac{r^m - r^n}{1 - r}|a_1 - a_0|$$

が成り立つ.

(2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{C}$ の Cauchy 列である.

$\boxed{11}$ (Fibonacci 数列) 複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 \in \mathbb{C}, \quad a_1 \in \mathbb{C}, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, $\dfrac{a_1}{a_0} \in \mathbb{R}$, $\dfrac{a_1}{a_0} > 0$ ならば, $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束することを証明し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ の値を求めよ.

第2章　複素関数の極限と正則関数

2.1　複素関数の極限

$\boxed{1}$ 次の (x, y) の複素関数 $f(x+iy)$ を $z = x+iy$ の複素関数 $f(z)$ で表せ.

(1) $f(x+iy) = (x^2 - y^2 - 2x) + i(2xy + 2y)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$.

(2) $f(x+iy) = (x^2 - y^2 - 2y) + i(-2xy + 2x)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$.

$\boxed{2}$ $A \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の部分集合, $a \in A$, $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数, $\alpha \in \mathbb{C}$ とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\displaystyle\lim_{z \to a} f(z) = \alpha$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall (r, \theta) \in B$, $(0 < r < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(a + r(\cos\theta + i\sin\theta)) - \alpha| < \varepsilon)$.

ただし, $B = \{(r, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}\ ;\ a + r(\cos\theta + i\sin\theta) \in A\}$.

$\boxed{3}$ 次の極限が存在するか否かを判定し, 存在すれば, 極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}^2}{z}$.

(2) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{z}{\overline{z}}$.

$\boxed{4}$ $A \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の部分集合, $a \in A$, $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数とする. $z \to a$ のとき, $f(z)$ が収束すれば, $|f(z)|$ は収束し,

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \left|\lim_{z \to a} f(z)\right|$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{5}$ $A \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の部分集合, $a \in A$, $f, g : A \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数とする. f が $A \setminus \{a\}$ で有界, かつ $z \to a$ のとき, $g(z)$ が 0 に収束すれば,

$$\lim_{z \to a} f(z)g(z) = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

2.2 複素連続関数

$\boxed{1}$ 次の $\mathbb{C}$ 上の複素関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が $\mathbb{C}$ で連続であることを証明せよ.

(1) $f(z)=\overline{z}$.

(2) $f(z)=|z|$.

$\boxed{2}$ $\mathbb{C}$ 上の複素関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\overline{z}^2}{z} & (z\neq 0),\\ 0 & (z=0)\end{cases}$$

によって定義するとき, f は $\mathbb{C}$ で連続であることを証明せよ.

$\boxed{3}$ $a,b,c\in\mathbb{C}$ とし, $\mathbb{R}^2$ 上の複素関数 $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ 上の複素関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ をそれぞれ

$$p(x,y)=ax^2+bxy+cy^2 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

$$f(z)=p(\mathrm{Re}z,\mathrm{Im}z) \quad (z\in\mathbb{C})$$

によって定義するとき, f が $\mathbb{C}$ で連続であることを証明せよ.

$\boxed{4}$ $a\in\mathbb{C}$, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の複素関数とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) f は a で連続である.

(ii) $f(a)\in V$ を満たす $\mathbb{C}$ の任意の開集合 $V\subseteq\mathbb{C}$ に対して $a\in U$ を満たす $\mathbb{C}$ のある開集合 $U\subseteq\mathbb{C}$ が存在し,

$$f(U)\subseteq V$$

が成り立つ.

$\boxed{5}$ (Banach の不動点定理) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の複素関数で, ある $0<r<1$ が存在し,

$$|f(z)-f(w)|\leq r|z-w| \quad (z,w\in\mathbb{C})$$

が成り立つものとするとき, 次のことを証明せよ.

(1) $z\in\mathbb{C}$ とし, 複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0=z,\quad a_{n+1}=f(a_n) \quad (n\in\mathbb{N})$$

によって定義すると, 任意の $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$ に対して

$$|a_{n+1}-a_n|\leq r|a_n-a_{n-1}|$$

が成り立つ.

(2) $f(\alpha)=\alpha$ を満たす $\alpha\in\mathbb{C}$ が一意に存在する.

【補足】f を $\mathbb{C}$ 上の**縮小写像**と言い, α を f の**不動点**と言う.

$\boxed{6}$ $A \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の部分集合, $a \in A$, $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の複素関数で, ある $L > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ が存在し,

$$|f(z) - f(w)| \leq L|z - w|^{\alpha} \quad (z, w \in A,\ z, w \neq a)$$

が成り立つものとする. $z \to a$ のとき, $f(z)$ は収束することを証明せよ.

【補足】f は $A \setminus \{a\}$ で **Hölder 連続** $(0 < \alpha < 1)$ または **Lipschitz 連続** $(\alpha = 1)$ であると言う.

$\boxed{7}$ $A \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の連結部分集合, $f : A \to \mathbb{C}$ を A 上の複素関数とするとき, f が A で連続ならば, $f(A)$ は $\mathbb{C}$ の連結部分集合であることを証明せよ. ただし, $f(A) = \{f(z)\ ;\ z \in A\}$.

$\boxed{8}$ $A \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の連結部分集合, $f : A \to \mathbb{Q}$ を A 上の複素関数とするとき, f が A で連続ならば, f は A で定数であることを証明せよ.

2.3 正則関数と Cauchy-Riemann 方程式

$\boxed{1}$ 次の $\mathbb{C}$ 上の複素関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が $\mathbb{C}$ で正則でないことを証明せよ.

(1) $f(z)=\overline{z}$.

(2) $f(z)=|z|$.

$\boxed{2}$ $\mathbb{C}$ 上の複素関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\overline{z}^2}{z} & (z\neq 0),\\ 0 & (z=0)\end{cases}$$

によって定義するとき, f は $\mathbb{C}$ で Cauchy-Riemann 方程式を満たし, 0 で複素微分可能でないことを証明せよ.

$\boxed{3}$ $a,b,c\in\mathbb{C}$ とし, $\mathbb{R}^2$ 上の複素関数 $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ 上の複素関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ をそれぞれ

$$p(x,y)=ax^2+bxy+cy^2\quad((x,y)\in\mathbb{R}^2),$$

$$f(z)=p(\mathrm{Re}z,\mathrm{Im}z)\quad(z\in\mathbb{C})$$

によって定義するとき, f が $\mathbb{C}$ で正則であるための a, b, c の必要十分条件を求め, その条件のとき,

$$f(z)=az^2\quad(z\in\mathbb{C})$$

であることを証明せよ.

$\boxed{4}$ $U\subseteq\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の開集合, $f:U\to\mathbb{C}$ を U 上の正則関数とするとき, $f'=0$ ならば, f は U の各連結成分で定数であることを証明せよ.

$\boxed{5}$ $U\subseteq\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の開集合, $f:U\to\mathbb{C}$ を U 上の正則関数とし,

$$u(x,y)=\mathrm{Re}f(z),\quad v(x,y)=\mathrm{Im}f(z)\quad(z=x+iy\in U)$$

とおくとき, 次のことを証明せよ. ただし, $J_{{}^t(u,v)}$ は ${}^t(u,v)$ の Jacobi 行列である.

(1) u, v は U で全微分可能であり,

$$|f'(z)|^2=\det J_{{}^t(u,v)}(x,y)\quad(z=x+iy\in U)$$

が成り立つ.

(2) $\det J_{{}^t(u,v)}=0$ ならば, f は U の各連結成分で定数である.

$\boxed{6}$ $U\subseteq\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の開集合, $K\subseteq U$ を $\mathbb{C}$ のコンパクトな面積確定集合, $\varphi:U\to\mathbb{C}$ を U 上の正則関数で, U から $\mathbb{C}$ への単射であるものとする. $\varphi(K)=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\ ;\ w=u+iv\in K,\ z=\varphi(w)\}$ とおくとき,

$$a(\varphi(K))=\iint_K|\varphi'(w)|^2dudv$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{7}$ $U \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の開集合とし, $V = \{\overline{z}\ ;\ z \in U\}$ とおく. $f : U \to \mathbb{C}$ を U 上の複素関数とし, V 上の複素関数 $g : V \to \mathbb{C}$ を

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} \quad (z \in V)$$

によって定義するとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) f は U で正則である.

(ii) g は V で正則である.

$\boxed{8}$ $U \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の開集合, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ を U 上の複素関数とし,

$$u(r,\theta) = \mathrm{Re} f(z), \quad v(r,\theta) = \mathrm{Im} f(z) \quad (z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in U)$$

とおくとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) f は z で複素微分可能である.

(ii) (Cauchy-Riemann 方程式) u, v は $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で全微分可能であり,

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta), \quad \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta)$$

を満たす.

定義.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

を **Wirtinger 微分**と言う.

$\boxed{9}$ (**指定演習問題 2**) $U \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の開集合, $z \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ を U 上の複素関数とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) f は z で複素微分可能である.

(ii) (d-bar 方程式) $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ は z で全微分可能であり,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0$$

を満たす.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば,

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{10}$ $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \to \mathbb{R}$ を U 上の C^2 級関数とするとき,

$$\Delta f(x,y) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}(x,y) \quad ((x,y) \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

第3章　複素解析関数

3.1　複素級数の収束・発散

● 複素級数

$\boxed{1}$ 任意の $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^{n+1})(1-z^{n+2})} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-z)^2} & (|z|<1), \\ \dfrac{1}{z(1-z)^2} & (|z|>1) \end{cases}$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{2}$ 次のことを証明せよ.

(1) $|z|<1$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

が成り立つ.

(2) 任意の $0 \leq r < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

が成り立つ.

$\boxed{3}$ (Stolz-Cesàro の定理) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1}-b_n>0$, かつ $\displaystyle\left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する.

このとき, $\displaystyle\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{4}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n > 0$, かつ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

このとき,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{b_N} \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{5}$ (Kronecker の補題) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を複素数列, $\{b_n\}_{n\geq 1}$ を数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

(ii) $\forall n \geq 1$, $b_{n+1} - b_n > 0$, かつ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

このとき,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{b_N} \sum_{n=1}^{N} a_n b_n = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

【ヒント】部分和分法を用いる.

● 複素級数の絶対収束・条件収束

$\boxed{6}$ $0 \leq r < 1$, $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とするとき, 次の複素級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$

が絶対収束することを証明せよ.

$\boxed{7}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の複素関数で, ある $r>0$, $M>0$ が存在し,

$$|f(z)| \leq M|z| \quad (|z|<r)$$

が成り立つものとするとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(a_n)$ は絶対収束することを証明せよ.

$\boxed{8}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束し, かつ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_nb_n$ は絶対収束する.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束し, かつ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ は条件収束する.

$\boxed{9}$ (Mertens の定理) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とするとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束し, かつ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right)$ は収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

が成り立つことを証明せよ.

3.2　整級数と複素解析関数

● 整級数

$\boxed{1}$ 次の整級数 f の収束域を求め, f を初等関数で表せ.

(1) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{b-z}\right)^n$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

(2) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$.

$\boxed{2}$ 次の整級数 f の収束域を求めよ.

(1) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log n} z^n$.

(2) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

$\boxed{3}$ 次の整級数 f の収束域を求めよ.

(1) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left\{1 + \frac{(-1)^n}{2}\right\}^n z^n$.

(2) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n = \begin{cases} 2^n & (n : \text{偶数}), \\ (-1)^n & (n : \text{奇数}). \end{cases}$

$\boxed{4}$ $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ とするとき, 次の整級数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha}}$$

の収束域を求めよ.

$\boxed{5}$ 次の整級数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

の収束域を求めよ.

【ヒント】部分和分法を用いる.

$\boxed{6}$ $0 < \theta < 2\pi$, $\alpha > 0$ とするとき, 次の整級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^{\alpha}} z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^{\alpha}} z^n$$

の収束域をそれぞれ求めよ.

● 項別微積分定理

$\boxed{7}$ $a, b \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$ とし, 複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 \in \mathbb{C}, \quad a_1 \in \mathbb{C}, \quad a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき,

$$\frac{a_0 + (a_1 - aa_0)z}{1 - az - bz^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が成り立つことを証明し, 右辺の収束半径を求めよ.

$\boxed{8}$ $a, b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ とし, $D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$ とおく. D 上の複素解析関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が

$$\begin{cases} z(1-z)f''(z) + \{c - (a+b+1)z\}f'(z) - abf(z) = 0 \quad (z \in D), \\ f(0) = 1,\ f'(0) = \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ.

(1) f を複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in D)$$

と表すとき, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の漸化式を導け.

(2) f を 0 を中心とする整級数で表せ.

【補足】$f = F(a, b, c; *)$ を**超幾何級数**と言う.

$\boxed{9}$ $a \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ とする. $\mathbb{C}$ 上の複素解析関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が

$$\begin{cases} zf''(z) + (c - z)f'(z) - af(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}), \\ f(0) = 1,\ f'(0) = \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ.

(1) f を複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

と表すとき, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の漸化式を導け.

(2) f を 0 を中心とする整級数で表せ.

【補足】$f = F(a, c; *)$ を**合流型超幾何級数**と言う.

$\boxed{10}$ $0 < k < 1$ とし, $D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$ とおく. D 上の複素解析関数 $f : D \to \mathbb{C}$ が

$$\begin{cases} f'(z) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (z \in D), \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

を満たすとき, f を 0 を中心とする整級数で表せ.

【補足】$f = K(k; *)$ を**第一種楕円積分**と言う.

• Abelの定理

$\boxed{11}$ $0 < \theta < 2\pi$ とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) $D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$ とし, D 上の複素関数 $f, g : D \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} z^n \quad (z \in D)$$

によって定義すると,

$$f(x) = -\frac{1}{2}\log(1 - 2x\cos\theta + x^2), \quad g(x) = \arctan\left(\frac{x\sin\theta}{1 - x\cos\theta}\right) \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ は収束し,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

が成り立つ.

3.3 孤立零点と一致の定理

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ を変数とする次の命題 $P(A)$ を考える.

命題 $P(A)$

$f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の複素解析関数とするとき,

$$f(x) = g(x) \quad (x \in A)$$

を満たせば, $f(z) = g(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ である.

このとき, 次の命題 $P(A)$ が真ならば証明し, 偽ならば反例を一つ挙げよ.

(1) $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

(2) $A = \mathbb{Z}$.

$\boxed{2}$ (**指定演習問題 3**) (一致の定理) $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $f, g : D \to \mathbb{C}$ を D 上の複素解析関数とするとき, D 上の 1 点でない区分的 C^1 級曲線 $C \subseteq D$ で,

$$f(z) = g(z) \quad (z \in C)$$

を満たすものが存在すれば, $f(z) = g(z)$ $(z \in D)$ であることを証明せよ.

$\boxed{3}$ (一致の定理) $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $f, g : D \to \mathbb{C}$ を D 上の複素解析関数とするとき, D の部分領域 $\emptyset \neq D' \subseteq D$ で,

$$f(z) = g(z) \quad (z \in D')$$

を満たすものが存在すれば, $f(z) = g(z)$ $(z \in D)$ であることを証明せよ.

$\boxed{4}$ (関数関係不変の原理) $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $a \in D$, $f, g : D \to \mathbb{C}$ を D 上の複素解析関数, $p : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ を多項式とするとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \neq a$, かつ $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ となる D の点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$p(f(z_n), g(z_n)) = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たすものが存在すれば, $p(f(z), g(z)) = 0$ $(z \in D)$ であることを証明せよ.

$\boxed{5}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上の複素解析関数とするとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \neq a$, $\overline{z}_n \in D$, かつ $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ となる D の点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$\overline{f(z_n)} = f(\overline{z}_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たすものが存在すれば, $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ $(z \in D)$ であることを証明せよ.

$\boxed{6}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $a \in D$, $f, g : D \to \mathbb{C}$ を D 上の複素解析関数とするとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \neq a$, かつ $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ となる D の点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で,

$$f(z_n)g(z_n) = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たすものが存在すれば, $f(z) = 0$ $(z \in D)$ または $g(z) = 0$ $(z \in D)$ であることを証明せよ.

第4章　初等関数

4.1　指数関数と Napier 数

● 指数関数

$\boxed{1}$ $(0,\infty)$ 上の関数 $l:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を

$$l(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt \quad (x>0)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) l は $(0,\infty)$ で狭義単調増加であり,

$$l((0,\infty))=\mathbb{R}$$

が成り立つ.

(2) l の逆関数を $e:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ とする. つまり, 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し,

$$l(y)=x$$

を満たす $y>0$ を $y=e(x)$ と書くとき, e は $\mathbb{R}$ で実解析的であり,

$$e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (x\in\mathbb{R})$$

が成り立つ.

$\boxed{2}$ (行列の指数関数) $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ とし, $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ とおくとき, 次の行列項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$$

(の各成分) が絶対収束することを証明し, その和を求めよ.

$\boxed{3}$ (行列の指数関数) $\lambda\in\mathbb{R}$ とし, $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ とおくとき, 次の行列項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$$

(の各成分) が絶対収束することを証明し, その和を求めよ.

$\boxed{4}$ (**指定演習問題 4**) $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とするとき, 次の複素数

$$\exp(\exp z)$$

の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

$\boxed{5}$ $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が次の常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} e'(z) = e(z) \quad (z \in \mathbb{C}), \\ e(0) = 1 \end{cases}$$

を満たせば, $e = \exp$ であることを証明せよ.

• Napier 数

$\boxed{6}$ $n \in \mathbb{N}$ とするとき, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta(x)x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

を満たす $0 < \theta(x) < 1$ が存在することを証明せよ.

$\boxed{7}$ 次のことを証明せよ.

(1) $e = 2.718\cdots$.

(2) e は無理数である.

$\boxed{8}$ 元本を $a > 0$, 1 期間の利率を $r > 0$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) (単利) 1 期間後に元本の利息を受け取るとき, 1 期間後の元利 (元本と利息の合計) を求めよ.

(2) (複利) $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ とし, $\dfrac{1}{n}$ 期間後に元利の利息を受け取るとき, 1 期間後の元利を求めよ.

(3) (2) の 1 期間の利率を r_n とするとき,

$$r \leq r_n < e^r - 1$$

が成り立つことを証明せよ.

4.2 三角関数と円周率

● 三角関数 (正弦, 余弦)

$\boxed{1}$ $[-1,1]$ 上の関数 $\theta : [-1,1] \to \mathbb{R}$ を

$$\theta(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) θ は $[-1,1]$ で狭義単調増加であり,

$$\theta(-x) = -\theta(x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

が成り立つ.

(2) θ の逆関数を $s : [-\theta(1), \theta(1)] \to [-1,1]$ とする. つまり, 任意の $-\theta(1) \leq x \leq \theta(1)$ に対し,

$$\theta(y) = x$$

を満たす $-1 \leq y \leq 1$ を $y = s(x)$ と書くとき, s は $[-\theta(1), \theta(1)]$ で実解析的であり,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (-\theta(1) \leq x \leq \theta(1))$$

が成り立つ.

$\boxed{2}$ (行列の指数関数) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし, $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ とおくとき, 次の行列項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

(の各成分) が絶対収束することを証明し, その和を求めよ.

$\boxed{3}$ (行列の指数関数) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし, $A = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$ とおくとき, 次の行列項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

(の各成分) が絶対収束することを証明し, その和を求めよ.

$\boxed{4}$ $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $c, s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が次の常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} c'(z) = -s(z) & (z \in \mathbb{C}), \\ c(0) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} s'(z) = c(z) & (z \in \mathbb{C}), \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

を満たせば, $c = \cos$, $s = \sin$ であることを証明せよ.

定義. 次の関数

$$\begin{cases} \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (z \in \mathbb{C}), \\ \sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (z \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

によって定義される $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ をそれぞれ**双曲余弦関数**, **双曲正弦関数**と言う.

$\boxed{5}$ 次のことを証明せよ.

(1) $\begin{cases} \cosh(iz) = \cos z \ (z \in \mathbb{C}), \\ \sinh(iz) = i \sin z \ (z \in \mathbb{C}). \end{cases}$

(2) cosh, sinh は $\mathbb{C}$ で複素解析的であり,

$$\begin{cases} \cosh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (z \in \mathbb{C}), \\ \sinh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\cosh z)' = \sinh z \quad (z \in \mathbb{C}), \\ (\sinh z)' = \cosh z \quad (z \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

が成り立つ.

$\boxed{6}$ 次の等式を証明せよ.

(1) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \ (z \in \mathbb{C})$.

(2) (加法定理) $\begin{cases} \cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w \ (z, w \in \mathbb{C}), \\ \sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w \ (z, w \in \mathbb{C}). \end{cases}$

$\boxed{7}$ 次の等式を証明せよ.

(1) $\begin{cases} \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \\ \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2). \end{cases}$

(2) $\begin{cases} |\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \\ |\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2). \end{cases}$

$\boxed{8}$ $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $c, s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が次の常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} c'(z) = s(z) \quad (z \in \mathbb{C}), \\ c(0) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} s'(z) = c(z) \quad (z \in \mathbb{C}), \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

を満たせば, $c = \cosh$, $s = \sinh$ であることを証明せよ.

● 円周率

$\boxed{9}$ $n \in \mathbb{N}$ とするとき, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta(x)x)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

を満たす $0 < \theta(x) < 1$ が存在することを証明せよ.

$\boxed{10}$ 次のことを証明せよ.

(1) $\cos 1 = 0.540\cdots$.

(2) $\cos 1$ は無理数である.

$\boxed{11}$ $n \in \mathbb{N}$ とするとき, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta(x)x)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$$

を満たす $0 < \theta(x) < 1$ が存在することを証明せよ.

$\boxed{12}$ 次のことを証明せよ.

(1) $\sin 1 = 0.841\cdots$.

(2) $\sin 1$ は無理数である.

$\boxed{13}$ (**指定演習問題 5**) $\pi = \dfrac{p}{q}$ を満たす $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \neq 0$ が存在するとし, 数列 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$I_n = \int_0^{\pi} f_n(x) \sin x dx \quad (n \in \mathbb{N}), \quad f_n(x) = \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

によって定義するとき, 次の (i)–(iv) を証明してから, (i)–(iii) と (iv) の矛盾を指摘せよ.

(i) $I_0 = 2$, $I_1 = 4q$.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f''_{n+2}(x) = -2(2n+3)qf_{n+1}(x) + p^2 f_n(x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

が成り立つ.

(iii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$I_{n+2} = 2(2n+3)qI_{n+1} - p^2 I_n$$

が成り立つ.

(iv) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 < I_n < \frac{1}{p}\frac{(p\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$$

が成り立つ.

$\boxed{14}$ $\pi = \dfrac{p}{q}$ を満たす $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \neq 0$ が存在するとし, 数列 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$I_n = \int_0^{\pi} f_n(x) \sin x dx \quad (n \in \mathbb{N}), \quad f_n(x) = \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

によって定義するとき, 次の (i)–(iv) を証明してから, (i)–(iii) と (iv) の矛盾を指摘せよ.

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_n^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & (k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}), \\ \dfrac{(-1)^{k-n} k!}{(2n-k)!(k-n)!} p^{2n-k} q^{k-n} & (k \in \{n, n+1, \cdots, 2n\}) \end{cases}$$

が成り立つ.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k f_n^{(k)}(0) \quad (k \in \{0, 1, \cdots, 2n\})$$

が成り立つ.

(iii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \{f_n^{(2k)}(0) + f_n^{(2k)}(\pi)\}$$

が成り立つ.

(iv) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 < I_n < \frac{1}{p} \frac{(p\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$$

が成り立つ.

• 三角関数 (正接)

$\boxed{15}$ 次のことを証明せよ.

(1) (Archimedes の不等式) 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ に対して

$$n \sin \frac{\pi}{n} < \pi < n \tan \frac{\pi}{n}$$

が成り立つ.

(2) (Archimedes 数) $\pi = 3.14\cdots$. 必要ならば, (1) に計算機を援用してもよい.

【ヒント】(1) に $n = 3 \cdot 2^5$ を代入する.

定義. 次の関数

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad \left(z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right) \pi i \right)$$

によって定義される $\tanh : \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right) \pi i \to \mathbb{C}$ を**双曲正接関数**と言う.

$\boxed{16}$ 次のことを証明せよ.

(1) $\tanh(iz) = i \tan z \ \left(z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right) \pi \right)$.

(2) $\tanh$ は $\mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right) \pi i$ で正則であり,

$$(\tanh z)' = \frac{1}{\cosh^2 z} \quad \left(z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right) \pi i \right)$$

が成り立つ.

$\boxed{17}$ 次の等式を証明せよ.

(1) $1 - \tanh^2 z = \dfrac{1}{\cosh^2 z} \ \left(z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right) \pi i \right)$.

(2) (加法定理) $\tanh(z+w) = \dfrac{\tanh z + \tanh w}{1 + \tan z \tan w} \ \left(z, w \in \mathbb{C},\ z, w, z+w \notin \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right) \pi i \right)$.

4.3 対数関数, 冪関数, 逆三角関数

• 対数関数

$\boxed{1}$ 次の複素数の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

(1) $\log(1-i)$.

(2) $\log(1+i\sqrt{3})$.

$\boxed{2}$ 次の複素数の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

(1) $\log(-1-i)$.

(2) $\log(-\sqrt{3}+i)$.

$\boxed{3}$ $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ 上の複素関数 $\varphi:\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to\mathbb{C}$ を

$$\varphi(z)=\log z \quad (z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0])$$

によって定義するとき,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{y\to+0}(\varphi(x+iy)-\varphi(x-iy)) \quad (x\in\mathbb{R},\ x\neq 0)$$

によって定義される $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上の関数 $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 次の方程式を解け.

(1) $\cos z=a\ (a>1)$.

(2) $\cos z=ib\ (b\in\mathbb{R},\ b\neq 0)$.

$\boxed{5}$ 次の方程式を解け.

(1) $\tan z=ib\ (b\in\mathbb{R},\ |b|<1)$.

(2) $\tan z=ib\ (b\in\mathbb{R},\ |b|>1)$.

$\boxed{6}$ (**指定演習問題 6**) 次の方程式を解け.

(1) $\tan z=2+i$.

(2) $\tan z=\sqrt{3}+2i$.

● 冪関数

$\boxed{7}$ 次の複素数の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

(1) $(1+i)^{\sqrt{2}}$.

(2) $(1-i\sqrt{3})^i$.

$\boxed{8}$ 次の複素数の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

(1) $(-1+i)^i$.

(2) $(-\sqrt{3}-i)^{\sqrt{2}}$.

$\boxed{9}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上の複素関数 $\varphi : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ を

$$\varphi(z) = z^\alpha \quad (z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$$

によって定義するとき,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y \to +0} (\varphi(x+iy) - \varphi(x-iy)) \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0)$$

によって定義される $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の関数 $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ を求めよ.

$\boxed{10}$ 次の方程式を解け.

(1) $a^z = 1 - i$ $(a > 0)$.

(2) $a^z = 1 + i\sqrt{3}$ $(a > 0)$.

$\boxed{11}$ 次の方程式を解け.

(1) $i^z = -1 - i$.

(2) $i^z = \sqrt{3} + i$.

$\boxed{12}$ $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ -\pi < \theta < \pi)$ とするとき, 次の複素数

$$z^z$$

の実部, 虚部をそれぞれ求めよ.

● 逆三角関数

$\boxed{13}$ $[-1,1]$ 上の関数列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ -1 \leq x \leq 1)$.

(2) T_n は n 次多項式である.

【補足】T_n を**第 1 種 Chebyshev 多項式**と言う.

$\boxed{14}$ $[-1,1]$ 上の関数列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ $(n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \theta \leq \pi)$.

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \pi & (m = n = 0), \\ \dfrac{\pi}{2} & (m = n \geq 1), \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

が成り立つ.

(3) 次の等式

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n \quad (-1 \leq x \leq 1,\ -1 < t < 1)$$

が成り立つ.

$\boxed{15}$ $[-1,1]$ 上の関数列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$V_n(x) = \sin(n \arccos x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $V_{n+1}(x) = 2xV_n(x) - V_{n-1}(x)$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ -1 \leq x \leq 1)$.

(2) $[-1,1]$ 上の関数列 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$U_n(x) = \frac{V_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

によって定義すると, U_n は n 次多項式である.

【補足】V_n, U_n をそれぞれ**第 2 種 Chebyshev 関数**, **第 2 種 Chebyshev 多項式**と言う.

$\boxed{16}$ $[-1,1]$ 上の関数列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$V_n(x) = \sin(n \arccos x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $V_n(\cos\theta) = \sin n\theta$ $(n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \theta \leq \pi)$.

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-1}^{1} \frac{V_m(x)V_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & (m = n = 0), \\ \dfrac{\pi}{2} & (m = n \geq 1), \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

が成り立つ.

(3) 次の等式

$$\frac{t}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} t^n \quad (-1 \leq x \leq 1,\ -1 < t < 1)$$

が成り立つ.

$\boxed{17}$ $[-1,1]$ 上の関数列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をそれぞれ

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad V_n = \sin(n \arccos x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

によって定義するとき,

$$T_n'(x) = n\frac{V_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{18}$ 次のことを証明せよ.

(1) 次の等式

$$\frac{\pi}{4} = \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} \quad (x > -1)$$

が成り立つ.

(2) 次の等式

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan x + \arctan \frac{1-2x-x^2}{1+2x-x^2} \quad \left(-\tan\frac{1}{8}\pi < x < \tan\frac{3}{8}\pi\right)$$

が成り立つ.

(3) 次の等式

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan x + \arctan \frac{1-4x-6x^2+4x^3+x^4}{1+4x-6x^2-4x^3+x^4} \quad \left(-\tan\frac{1}{16}\pi < x < \tan\frac{3}{16}\pi\right)$$

が成り立つ.

$\boxed{19}$ 次のことを証明せよ.

(1) (Machin の公式) 次の等式

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

が成り立つ.

(2) 次の不等式

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 < \arctan x < x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \quad (0 < x \leq 1)$$

が成り立つ.

(3) $\pi = 3.1415\cdots$. 必要ならば, (3) に計算機を援用してもよい.

第5章　複素線積分と正則関数

5.1　複素線積分とその基本性質

● 定積分

$\boxed{1}$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ を $[a, b]$ 上の複素連続関数とするとき, 次の等式を証明せよ.

(1) $\displaystyle \mathrm{Re}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}f(t)dt.$

(2) $\displaystyle \mathrm{Im}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Im}f(t)dt.$

$\boxed{2}$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ を $[a, b]$ 上の複素連続関数, $c \in \mathbb{C}$ とするとき, 次の等式を証明せよ.

(1) $\displaystyle \int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$

(2) $\displaystyle \int_a^b (cf)(t)dt = c\int_a^b f(t)dt.$

$\boxed{3}$ (積分の三角不等式) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ を $[a, b]$ 上の複素連続関数とするとき,

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{4}$ (微分積分学の基本定理) $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間, $f : I \to \mathbb{C}$ を I 上の複素関数とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) (原始関数) f が I で C^1 級ならば, 任意の $a, b \in I$, $a \neq b$ に対して

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

が成り立つ.

(2) (不定積分) f が I で連続ならば, 任意の $a \in I$ に対し,

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds \quad (t \in I)$$

によって定義される $F : I \to \mathbb{C}$ は I で C^1 級であり, $F' = f$ が成り立つ.

● 複素線積分 I

$\boxed{5}$ $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ とおくとき, 任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\int_C z^m \overline{z}^n |dz| = \begin{cases} 2\pi & (m = n), \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{6}$ $a > 0$ とし, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = a\}$ とおくとき, 次の複素線積分

$$\int_C |z - a||dz|$$

の値を求めよ.

$\boxed{7}$ $U \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の開集合, $C \subseteq U$ を U 上の区分的 C^1 級曲線, $\varphi : U \to \mathbb{C}$ を U 上の正則関数とする. $\varphi(C) = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\ ;\ w = u + iv \in C,\ z = \varphi(w)\}$ とおくとき,

$$l(\varphi(C)) = \int_C |\varphi'(w)||dw|$$

が成り立つことを証明せよ.

● 複素線積分 II

$\boxed{8}$ 次の複素線積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C z dz$, C は 0 と $a+ib$ を結ぶ線分 $(a, b \in \mathbb{R})$.

(2) $\displaystyle\int_C z dz$, C は 0 と a と $a+ib$ を結ぶ折線 $(a, b \in \mathbb{R})$.

$\boxed{9}$ 次の複素線積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C \overline{z} dz$, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im} z \geq 0,\ |z| = r\}\ (r > 0)$.

(2) $\displaystyle\int_C \overline{z} dz$, C は a と ib と $-a$ を結ぶ折線 $(a, b \in \mathbb{R})$.

$\boxed{10}$ 次の複素線積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z} dz$, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re} z \leq 0,\ |z| = r\}\ (r > 0)$.

(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z} dz$, C は $-1 + i\tan\theta$ と $-1 + i\tan\varphi$ を結ぶ線分 $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta, \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\boxed{11}$ (**指定演習問題 7**) 次の複素線積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{\overline{z}^2}{z} dz$, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re} z \geq 0,\ \mathrm{Im} z \geq 0,\ |z| = r\}\ (r > 0)$.

(2) $\displaystyle\int_C \frac{\overline{z}^2}{z} dz$, C は $1 + i\tan\theta$ と $1 + i\tan\varphi$ を結ぶ線分 $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta, \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\boxed{12}$ 次の複素線積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C \log z dz$, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = r,\ z \neq -r\}\ (r > 0)$.

(2) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C z^{\alpha-1} dz$, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = r,\ z \neq -r\}\ (r > 0,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0)$.

【ヒント】広義積分を用いる.

$\boxed{13}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上の正則関数とするとき, D 上の任意の区分的 C^1 級閉曲線 $C \subseteq D$ に対して次の複素線積分

$$\int_C \overline{f(z)} f'(z) dz$$

の実部が 0 であることを証明せよ.

$\boxed{14}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上の正則関数とするとき, f が D で $\mathrm{Re} f > 0$ ならば, D 上の任意の区分的 C^1 級閉曲線 $C \subseteq D$ に対して

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{15}$ $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とし, $C = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z-a| = r\}$ とおく. $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を多項式とするとき, 次の複素線積分

$$\int_C \overline{p(z)}dz$$

の値を求めよ.

$\boxed{16}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ を区分的 C^1 級有界領域とするとき,

$$a(D) = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \overline{z}dz$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{17}$ (正則変数変換公式) $U \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の開集合, $C \subseteq U$ を U 上の区分的 C^1 級曲線, $\varphi : U \to \mathbb{C}$ を U 上の正則関数とする. $\varphi(C) = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,;\, w = u + iv \in C,\ z = \varphi(w)\}$ とおき, $f : \varphi(C) \to \mathbb{C}$ を $\varphi(C)$ 上の複素連続関数とするとき,

$$\int_{\varphi(C)} f(z)dz = \int_C (f \circ \varphi)(w)\varphi'(w)dw$$

が成り立つことを証明せよ.

● 複素線積分の基本性質

$\boxed{18}$ $C \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の区分的 C^1 級曲線, $f : C \to \mathbb{C}$ を C 上の複素連続関数とするとき,

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq l(C) \max_{z \in C} |f(z)|$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{19}$ $a, b > 0$, C を a と ib を結ぶ線分とするとき, 次の複素線積分

$$\left| \int_C \frac{1}{z^2} dz \right|$$

の上界を一つ求めよ.

$\boxed{20}$ $r > 1$, C を r と ir を反時計回りに結ぶ $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = r\}$ 上の円弧とするとき, 次の複素線積分

$$\left| \int_C \frac{1}{z^2 - 1} dz \right|$$

の上界を一つ求めよ.

$\boxed{21}$ 次のことを証明せよ.

(1) (Jordan の不等式) 次の不等式

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $r > 0$ に対して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin x} dx < \frac{\pi}{2r}$$

が成り立つ.

$\boxed{22}$ (Jordan の補題) $r > 0$ とし, $C_r = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im} z \geq 0,\ |z| = r\}$ とおく. $f : C_r \to \mathbb{C}$ を C_r 上の複素連続関数とするとき, 任意の $\xi > 0$ に対して

$$\left| \int_{C_r} f(z) e^{i \xi z} dz \right| \leq \frac{\pi}{\xi} \max_{z \in C_r} |f(z)|$$

が成り立つことを証明せよ.

5.2 閉曲線の回転数・ホモロジー

• 閉曲線の回転数

$\boxed{1}$ $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の向き付けられた区分的 C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{z(t) \ ; \ a \leq t \leq b\}$ とおくとき,

$$\exp(i\theta(t)) = \frac{z(t)}{|z(t)|} \quad (a \leq t \leq b)$$

を満たす $[a,b]$ 上の連続関数 $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ が存在することを証明せよ.

定義. $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の向き付けられた区分的 C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{z(t) \ ; \ a \leq t \leq b\}$ とおく.

$$\exp(i\theta(t)) = \frac{z(t)}{|z(t)|} \quad (a \leq t \leq b)$$

を満たす $[a,b]$ 上の連続関数 $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ を C の**角関数**と言う.

$\boxed{2}$ $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の向き付けられた区分的 C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{z(t) \ ; \ a \leq t \leq b\}$ とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) $\theta, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ を C の角関数とすると,

$$\theta \equiv \varphi \pmod{2\pi}$$

が成り立つ.

(2) $z(a) = z(b)$ ならば, ある $n \in \mathbb{Z}$ が存在し, C の任意の角関数 $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して

$$\theta(b) - \theta(a) = 2n\pi$$

が成り立つ.

定義. $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の向き付けられた区分的 C^1 級パラメータ閉曲線とし, $C = \{z(t) \ ; \ a \leq t \leq b\}$ とおく. $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ を C の角関数とするとき,

$$\mathrm{Ind}(C, 0) = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$$

を C の 0 での**指数**と言う.

定義. $C \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線とする. 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus C$ に対し,

$$\mathrm{Ind}(C, z) = \mathrm{Ind}(C - z, 0)$$

を C の z での**指数**と言う.

$\boxed{3}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $C \subseteq D$ を D 上の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線とするとき,

$$\mathrm{Ind}(C, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = n(C, z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus C)$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{4}$ $C \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の向き付けられた区分的 C^1 級サイクルとするとき, 次の複素線積分

$$I(a,b) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)}dz \quad (a, b \in \mathbb{C} \setminus C,\ a \neq b)$$

の値を求めよ.

$\boxed{5}$ $C \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の向き付けられた区分的 C^1 級サイクルとするとき, 次の複素線積分

$$I(a,b) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z}{(z-a)(z-b)}dz \quad (a, b \in \mathbb{C} \setminus C,\ a \neq b)$$

の値を求めよ.

$\boxed{6}$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a, z_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \{1, \cdots, n\})$, $a \neq 0$ とし, 多項式 $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$p(z) = a(z - z_1)\cdots(z - z_n) \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \cdots + \frac{1}{z - z_n} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \cdots, z_n\})$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) $r > 0$, $r \neq |z_k|$ $(k \in \{1, \cdots, n\})$ とし, $C_r = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = r\}$ とおくとき, 次の複素線積分

$$I_r = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{p'(z)}{p(z)}dz$$

の値を求めよ.

• 閉曲線のホモロジー

$\boxed{7}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $C_0, C_1 \subseteq D$ を D 上の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線とするとき, 次の (i)$\Rightarrow$(ii) を証明し, (i)$\Leftarrow$(ii) の反例を一つ挙げよ.

(i) C_0 は C_1 に D でホモトピー同値である.

(ii) C_0 は C_1 に D でホモロジー同値である.

$\boxed{8}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) D は $\mathbb{C}$ のホモトープな単連結領域である.

(ii) D は $\mathbb{C}$ のホモローグな単連結領域である.

【ヒント】Riemann の写像定理を用いる.

定義. $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域とする. D 上の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線全体の集合を

$$\mathcal{C}(D) = \{C \subseteq D\ ;\ C \text{ は } D \text{ 上の向き付けられた区分的 } C^1 \text{級閉曲線である }\}$$

と書く.

$\boxed{9}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) $\forall C_0, C_0', C_1, C_1' \in \mathcal{C}(D)$, $(C_0 \sim C_0',\ C_1 \sim C_1' \pmod{D} \Rightarrow C_0 + C_1 \sim C_0' + C_1' \pmod{D})$.

(2) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall C, C' \in \mathcal{C}(D)$, $(C \sim C' \pmod{D} \Rightarrow nC \sim nC' \pmod{D})$.

定義. $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ とする. 次の (i), (ii) を満たす $\mathcal{C}(D)$ の閉曲線列 $\{C_1, \cdots, C_m\}$ を D の**ホモロジー基底**と言う.

(i) 任意の $C \in \mathcal{C}(D)$ に対し,

$$C \sim n_1 C_1 + \cdots + n_m C_m \pmod{D}$$

を満たす整数列 $\{n_1, \cdots, n_m\}$ が存在する.

(ii) 整数列 $\{n_1, \cdots, n_m\}$ が

$$n_1 C_1 + \cdots + n_m C_m \sim 0 \pmod{D}$$

を満たせば, $n_1 = \cdots = n_m = 0$ である.

$\boxed{10}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域とするとき, D の全てのホモロジー基底は同じ個数の $\mathcal{C}(D)$ の閉曲線からなることを証明せよ.

定義. $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ とする. D が $\mathbb{C}$ の **ホモローグな $\boldsymbol{m+1}$ 重連結領域**であるとは, m 個の $\mathcal{C}(D)$ の閉曲線からなる D のホモロジー基底が存在することを言う.

5.3 Cauchy の積分定理・積分公式

• スカラー・ポテンシャルと原始関数

$\boxed{1}$ (**指定演習問題 8**) $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の (ホモトープな) 単連結領域, $u : D \to \mathbb{R}$ を D 上の C^2 級関数とするとき, u が D で**調和**ならば, つまり,

$$\Delta u = 0$$

を満たせば, 次の (i), (ii) を満たす D 上の C^2 級関数 $v : D \to \mathbb{R}$ が存在することを証明せよ.

(i) D 上の複素関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy \in D)$$

によって定義すると, f は D で正則である.

(ii) v は D で調和である.

【補足】v を u の**共役調和関数**と言う.

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) u が $\mathbb{R}^2$ で調和であることを証明し, u の共役調和関数 $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を一つ求めよ.

(2) $u + iv$ の原始関数を一つ求めよ.

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) u が $\mathbb{R}^2$ で調和であることを証明し, u の共役調和関数 $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を一つ求めよ.

(2) $u + iv$ の原始関数を一つ求めよ.

$\boxed{4}$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > 0\}$ とし, D 上の関数 $u : D \to \mathbb{R}$ を

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \in D)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) u が D で調和であることを証明し, u の共役調和関数 $v : D \to \mathbb{R}$ を一つ求めよ.

(2) $u + iv$ の原始関数を一つ求めよ.

• Cauchy の積分定理・積分公式 I

$\boxed{5}$ $a > 0$ とし, $\mathbb{C}$ 上の複素関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-az^2} \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $r > 0$ に対して

(i) $\xi > 0$ ならば,

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{r}^{r+i\frac{\xi}{2a}} f(z)dz - \int_{-r+i\frac{\xi}{2a}}^{r+i\frac{\xi}{2a}} f(z)dz - \int_{-r}^{-r+i\frac{\xi}{2a}} f(z)dz = 0$$

が成り立つ.

(ii) $\xi < 0$ ならば,

$$\int_{-r+i\frac{\xi}{2a}}^{r+i\frac{\xi}{2a}} f(z)dz + \int_{r+i\frac{\xi}{2a}}^{r} f(z)dz - \int_{-r}^{r} f(x)dx - \int_{-r+i\frac{\xi}{2a}}^{-r} f(z)dz = 0$$

が成り立つ.

(2) 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx$$

が成り立つ.

(3) (Fourier 変換) $\mathbb{R}$ 上の関数 $\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

によって定義すると,

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

• Cauchy の積分定理・積分公式 II

$\boxed{6}$ (**指定演習問題 9**) $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 2\}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式

$$\frac{2z-3}{z(z^2-4z+3)} = \frac{f(z)}{z} + \frac{g(z)}{z-1} \quad (z \in C)$$

を満たす C 上の複素関数 $f, g : C \to \mathbb{C}$ を求めよ.

(2) 次の複素線積分

$$\int_C \frac{2z-3}{z(z^2-4z+3)} dz$$

の値を求めよ.

$\boxed{7}$ $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 2\}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式

$$\frac{z^2+3iz-2i}{(z^2+1)(z^2-9)} = \frac{f(z)}{z-i} + \frac{g(z)}{z+i} \quad (z \in C)$$

を満たす C 上の複素関数 $f, g : C \to \mathbb{C}$ を求めよ.

(2) 次の複素線積分

$$\int_C \frac{z^2+3iz-2i}{(z^2+1)(z^2-9)} dz$$

の値を求めよ.

$\boxed{8}$ $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $r \neq |a|$ とし, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = r\}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式

$$\int_C \frac{1}{|z-a|^2} |dz| = \int_C f(z) dz$$

を満たす C 上の複素関数 $f : C \to \mathbb{C}$ を求めよ.

(2) 次の複素線積分

$$\int_C \frac{1}{|z-a|^2} |dz|$$

の値を求めよ.

$\boxed{9}$ $0 < a < r$ とし, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = r\}$ とおくとき, 次の複素線積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2-a^2} dz.$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+a^2} dz.$

$\boxed{10}$ $0 < a < r$ とし, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = r\}$ とおくとき, 次の複素線積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^2-a^2} dz.$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^2+a^2} dz.$

$\boxed{11}$ $0 < a < r$ とし, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = r\}$ とおくとき, 次の複素線積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2 - a^2} dz.$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz.$

$\boxed{12}$ $0 < b < a$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $z = e^{ix}$ とおくとき, x の関数 $\dfrac{1}{a + b\cos x}$ を z の関数で表せ.

(2) 次の積分

$$\int_0^\pi \frac{1}{a + b\cos x} dx$$

の値を求めよ.

$\boxed{13}$ $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \pm 1$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $z = e^{ix}$ とおくとき, x の関数 $\dfrac{1}{1 - 2a\cos x + a^2}$ を z の関数で表せ.

(2) 次の積分

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 - 2a\cos x + a^2} dx$$

の値を求めよ.

$\boxed{14}$ 次のことを証明せよ.

(1) $\mathbb{C}$ 上の複素関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって定義すると, 任意の $r > 0$ に対して

$$\int_0^r f(x)dx + \int_r^{r(1+i)} f(z)dz - \int_0^{r(1+i)} f(z)dz = 0$$

が成り立つ.

(2) (Fresnel 積分) $(0, \infty)$ 上の関数 $s, c : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{cases} s(r) = \displaystyle\int_0^r \sin x^2 dx & (r > 0), \\ c(r) = \displaystyle\int_0^r \cos x^2 dx & (r > 0) \end{cases}$$

によって定義すると, $\displaystyle\lim_{r\to\infty} s(r) = \lim_{r\to\infty} c(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ となる.

• Cauchy の積分定理・積分公式 III

定義. $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域とする. D 上の正則関数全体の集合を

$$\mathcal{O}(D) = \{ f : D \to \mathbb{C} \ ; \ f \text{ は } D \text{ で正則である} \}$$

と書く.

$\boxed{15}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) D は $\mathbb{C}$ のホモローグな単連結領域である.

(ii) 任意の $C \in \mathcal{C}(D)$ に対して

$$\int_C f(z)dz = 0 \quad (f \in \mathcal{O}(D))$$

が成り立つ.

$\boxed{16}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) D は $\mathbb{C}$ のホモローグな $m+1$ 重連結領域である.

(ii) $\mathcal{C}(D)$ の閉曲線列 $\{C_1, \cdots, C_m\}$ が存在し, 任意の $C \in \mathcal{C}(D)$ に対し,

$$\int_C f(z)dz = n_1 \int_{C_1} f(z)dz + \cdots + n_m \int_{C_m} f(z)dz \quad (f \in \mathcal{O}(D))$$

を満たす整数列 $\{n_1, \cdots, n_m\}$ が一意に存在する.

【補足】 $\displaystyle\int_{C_1} f(z)dz, \cdots, \int_{C_m} f(z)dz$ を $f(z)dz$ の**周期**と言う.

$\boxed{17}$ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の複素関数 $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} \quad (z \in \mathbb{C}, \ z \neq 0)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $\varepsilon > 0$ とし, $C_\varepsilon = \{\varepsilon e^{it} \ ; \ 0 \leq t \leq \pi\}$ とおくと, 任意の $r > \varepsilon$, $s > 0$ に対して

$$\int_\varepsilon^r f(x)dx + \int_r^{r+is} f(z)dz - \int_{-r+is}^{r+is} f(z)dz - \int_{-r}^{-r+is} f(z)dz + \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)dx - \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = 0$$

が成り立つ.

(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = \pi i.$

(3) (Dirichlet 積分) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

● 積分路の変形

$\boxed{18}$ $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ とし,

$$\mathcal{C}(1, z) = \{C \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\} \ ; \ C \text{ は } 1 \text{ と } z \text{ を結ぶ } \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ 上の区分的 } C^1 \text{級曲線である } \}$$

とおくとき, 任意の $C \in \mathcal{C}(1, z)$ に対して

$$\exp\left(\int_C \frac{1}{\zeta} d\zeta\right) = z$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{19}$ $a, b > 0$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $z = a\cos x + ib\sin x$ とおくとき, z の関数 $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\dfrac{dz}{dx}\right)$ を x の関数で表せ.

(2) 次の積分

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} dx$$

の値を求めよ.

$\boxed{20}$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし,

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ は } [a, b] \text{ で連続である } \}$$

とおく. 任意の $f \in C([a, b])$ に対し, $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ 上の複素関数 $\varphi : \mathbb{C} \setminus [a, b] \to \mathbb{C}$ を

$$\varphi(z) = \int_a^b \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (z \in \mathbb{C} \setminus [a, b])$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) φ は $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ で正則である.

(2) 任意の $a < x < b$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{y \to +0} (\varphi(x + iy) - \varphi(x - iy)) = f(x)$$

が成り立つ.

【ヒント】Weierstrass の近似定理を用いる.

5.4　正則関数の複素解析性・調和性

● 正則関数の複素解析性

$\boxed{1}$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき,

$$\int_a^b \frac{1}{\xi - z} d\xi = \log\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus [a,b])$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{2}$ $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 2\}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式

$$\frac{3z-9}{z^2(z^2+2z-3)} = \frac{f(z)}{z^2} + \frac{g(z)}{z-1} \quad (z \in C)$$

を満たす C 上の複素関数 $f, g : C \to \mathbb{C}$ を求めよ.

(2) 次の複素線積分

$$\int_C \frac{3z-9}{z^2(z^2+2z-3)} dz$$

の値を求めよ.

$\boxed{3}$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $r > 0$ とし, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = r\}$ とおくとき, 次の複素線積分

$$\int_C \frac{e^z}{z^n} dz$$

の値を求めよ.

$\boxed{4}$ $m, n \in \mathbb{Z}$, $r > 1$ とし, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = r\}$ とおくとき, 次の複素線積分

$$\int_C z^m (1-z)^n dz$$

の値を求めよ.

$\boxed{5}$ $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $r \neq |a|$ とし, $C = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = r\}$ とおくとき, 次の複素線積分

$$\int_C \frac{1}{|z-a|^4} |dz|$$

の値を求めよ.

$\boxed{6}$ (Legendre 多項式, Schlaefli の積分公式) $\mathbb{C}$ 上の関数列 $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$P_n(z) = \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって定義するとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_{C_r(z)} \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta \quad (z \in \mathbb{C},\ r > 0)$$

が成り立つことを証明せよ. ただし, $C_r(z) = \{\zeta \in \mathbb{C}\ ;\ |\zeta - z| = r\}$.

$\boxed{7}$ (Hermite 多項式, Schlaefli の積分公式) $\mathbb{C}$ 上の関数列 $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって定義するとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$H_n(z) = e^{z^2} \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \int_{C_r(z)} \frac{e^{-\zeta^2}}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (z \in \mathbb{C},\ r > 0)$$

が成り立つことを証明せよ. ただし, $C_r(z) = \{\zeta \in \mathbb{C}\ ;\ |\zeta - z| = r\}$.

$\boxed{8}$ (Laguerre 多項式, Schlaefli の積分公式) $\mathbb{C}$ 上の関数列 $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$L_n(z) = \frac{e^z}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^n e^{-z}) \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって定義するとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$L_n(z) = e^z \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z)} \frac{\zeta^n e^{-\zeta}}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (z \in \mathbb{C},\ r > 0)$$

が成り立つことを証明せよ. ただし, $C_r(z) = \{\zeta \in \mathbb{C}\ ;\ |\zeta - z| = r\}$.

$\boxed{9}$ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) (Cauchy の評価式) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|f^{(n)}(z)| \leq \sup_{\zeta \in C_r(z)} |f(\zeta)| \frac{n!}{r^n} \quad (z \in \mathbb{C},\ r > 0)$$

が成り立つ. ただし, $C_r(z) = \{\zeta \in \mathbb{C}\ ;\ |\zeta - z| = r\}$.

(2) ある $M \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$|f(z)| \leq M(|z| + 1)^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

が成り立てば, f は n 次以下の多項式である.

$\boxed{10}$ (**指定演習問題 10**) $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) D は $\mathbb{C}$ のホモローグな単連結領域である.

(ii) (原始関数) 任意の $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し, $\varphi' = f$ を満たす $\varphi \in \mathcal{O}(D)$ が存在する.

$\boxed{11}$ (Morera の定理) $U \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の開集合とする. $\mathcal{T}(U) = \{T \subseteq U\ ;\ T$ は U 上の閉三角形である $\}$ とおくとき, U 上の複素連続関数 $f : U \to \mathbb{C}$ が

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0 \quad (T \in \mathcal{T}(U))$$

を満たせば, f は U で正則であることを証明せよ.

● 正則関数の調和性

$\boxed{12}$ (強最大値原理) $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の領域, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上の正則関数とするとき, $\mathrm{Re} f$ が D のある点で最大ならば, f は D で定数であることを証明せよ.

【ヒント】$g = \exp \circ f$ とおき, 強最大値原理を用いる.

$\boxed{13}$ (弱最大値原理) $D \subseteq \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の有界領域, $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ を D 上の正則関数とするとき, $\mathrm{Re} f$ が $\overline{D}$ で連続ならば, $\mathrm{Re} f$ は ∂D のある点で最大であることを証明せよ.

$\boxed{14}$ (Schwarz の補題) $D = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < 1\}$, $f : D \to \mathbb{C}$ を D 上の正則関数とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$ $(z \in D)$ ならば,

$$|f(z)| \leq |z| \quad (z \in D), \quad |f'(0)| \leq 1$$

が成り立つ.

(2) (1) の条件のとき,

$$|f(a)| = |a|$$

を満たす $a \in D \setminus \{0\}$ が存在するか, または $|f'(0)| = 1$ ならば, ある $0 \leq \theta < 2\pi$ が存在し,

$$f(z) = e^{i\theta} z \quad (z \in D)$$

が成り立つ.

$\boxed{15}$ (Hadamard の三線定理) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $S = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ a \leq \mathrm{Re} z \leq b\}$, $f : S \to \mathbb{C}$ を S 上の複素有界連続関数とする. $[a, b]$ 上の関数 $M : [a, b] \to \mathbb{R}$ を

$$M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)| \quad (a \leq x \leq b)$$

によって定義するとき, f が $S^i = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ a < \mathrm{Re} z < b\}$ で正則ならば,

$$\log M(x) \leq \frac{b - x}{b - a} \log M(a) + \frac{x - a}{b - a} \log M(b) \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つことを証明せよ.

$\boxed{16}$ (Hadamard の三円定理) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ a \leq |z| \leq b\}$, $f : A \to \mathbb{C}$ を A 上の複素連続関数とする. $[a, b]$ 上の関数 $M : [a, b] \to \mathbb{R}$ を

$$M(r) = \sup_{z \in C_r} |f(z)|, \quad C_r = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| = r\} \quad (a \leq r \leq b)$$

によって定義するとき, f が $A^i = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ a < |z| < b\}$ で正則ならば,

$$\log M(r) \leq \frac{\log b - \log r}{\log b - \log a} \log M(a) + \frac{\log r - \log a}{\log b - \log a} \log M(b) \quad (a \leq r \leq b)$$

が成り立つことを証明せよ.

【ヒント】$g = f \circ \exp$ とおき, Hadamard の三線定理を用いる.

$\boxed{17}$ (Liouville の定理) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数とするとき, $\mathrm{Re}f$ が $\mathbb{C}$ で上または下に有界ならば, f は $\mathbb{C}$ で定数であることを証明せよ.

【ヒント】$g=\exp\circ f$ とおき, Liouville の定理を用いる.

$\boxed{18}$ $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, $a_k\in\mathbb{C}$ $(k\in\{0,1,\cdots,n\})$, $a_n\neq 0$ とし, 多項式 $p,q:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ をそれぞれ

$$p(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0 \quad (z\in\mathbb{C}),$$

$$q(z)=zp'(z)-np(z) \quad (z\in\mathbb{C})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) q の次数は $n-1$ 以下であり,

$$\frac{p'(z)}{p(z)}=\frac{n}{z}+\frac{q(z)}{zp(z)} \quad (z\in\mathbb{C},\ z\neq 0)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $r>0$ に対して

$$|p(z)|\geq r^n\left\{|a_n|-\left(\frac{|a_{n-1}|}{r}+\cdots+\frac{|a_0|}{r^n}\right)\right\} \quad (z\in\mathbb{C},\ |z|=r)$$

が成り立つ.

(3) $r>0$ とし, $C_r=\{re^{it}\ ;\ 0\leq t\leq 2\pi\}$ とおくと,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{p'(z)}{p(z)}dz=n$$

となる.

(4) (代数学の基本定理) 位数だけ重複させると, n 個の p の $\mathbb{C}$ での零点が存在する.

関連図書

[1] L. V. アールフォルス, 複素解析, 現代数学社, 1982 年.

[2] 杉浦 光夫, 解析入門 I(基礎数学), 東京大学出版会, 1980 年.

[3] 吉田 洋一, 函数論 第 2 版 (岩波全書), 岩波書店, 1965 年.