

微分積分学III 講義ノート

柿澤 亮平

島根大学学術研究院 教育学系 数学科教育専攻

目次

第 1 章	ベクトル空間	1
1.1	ベクトル空間上の内積	1
1.2	ベクトル空間上の位相	4
1.3	点列の極限	7
第 2 章	多変数関数の微分法	11
2.1	関数の極限	11
2.2	連続関数, 一様連続関数, 半連続関数	18
2.3	全導関数と接平面	26
第 3 章	Taylor の定理, 陰関数定理	38
3.1	高階偏導関数	38
3.2	Taylor の定理と関数の極大・極小	42
3.3	陰関数定理と関数の条件付き極値	46
第 4 章	多変数関数の積分法	49
4.1	有界閉区間での多重積分	49
4.2	一般の集合での多重積分	55
4.3	変数変換公式	63
4.4	広義多重積分	65
第 5 章	ベクトル場の微積分法	69
5.1	ベクトル場とその微分	69
5.2	線積分とその基本性質	74
5.3	Green の定理, Gauss の定理	82
5.4	スカラー・ポテンシャル	85

第1章 ベクトル空間

1.1 ベクトル空間上の内積

● ベクトル空間

定義 1.1.1. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ を

$$x = (x_1, x_2)$$

のように並べたものを **2 次ベクトル** と言う. また, 2 次ベクトル全体の集合を

$$\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) ; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

と書く.

定義 1.1.2. 2 次ベクトルの相等・加法・スカラー乗法を

(1) (相等) $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x = y \Leftrightarrow (x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2))$.

(2) (加法) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) (x, y \in \mathbb{R}^2)$.

(3) (スカラー乗法) $ax = (ax_1, ax_2) (a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2)$.

によって定義する.

命題 1.1.1. $\mathbb{R}^2$ は 2 次ベクトルの加法・スカラー乗法について線型空間である. つまり, 次の (i)–(viii) を満たす.

(i) $(x + y) + z = x + (y + z) (x, y, z \in \mathbb{R}^2)$.

(ii) $\exists! 0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}^2, x + 0 = x = 0 + x$.

(iii) $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \exists! -x = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2, x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

(iv) $x + y = y + x (x, y \in \mathbb{R}^2)$.

(v) $(ab)x = a(bx) (a, b \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2)$.

(vi) $1x = x (x \in \mathbb{R}^2)$.

(vii) $(a + b)x = ax + bx (a, b \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2)$.

(viii) $a(x + y) = ax + ay (a \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^2)$.

証明. 省略 (微分積分学 I).

□

注意 (減法). (iii) の $x + (-y)$ を $x - y$ と書く.

● ベクトル空間上の内積・ノルム・距離

定義 1.1.3. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^2$ に対し,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^2 x_i y_i$$

を x と y の内積と言う.

命題 1.1.2. $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は内積空間である. つまり, 次の (i)–(iv) を満たす.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^2, (\langle x, x \rangle \geq 0) \wedge (\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \ (x, y \in \mathbb{R}^2)$.

(iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \ (x, y, z \in \mathbb{R}^2)$.

(iv) $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle \ (a \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^2)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 1.1.4. 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対し,

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

を x のノルムまたは絶対値と言う.

命題 1.1.3.

(1) $|x_1| \leq |x| \ (x \in \mathbb{R}^2)$.

(2) $|x_2| \leq |x| \ (x \in \mathbb{R}^2)$.

(3) $|x| \leq |x_1| + |x_2| \ (x \in \mathbb{R}^2)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.1.4 (Schwarz の不等式). 任意の $x, y \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.1.5. $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^2, (|x| \geq 0) \wedge (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

(ii) (三角不等式) $|x + y| \leq |x| + |y| \ (x, y \in \mathbb{R}^2)$.

(iii) $|ax| = |a||x| \ (a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.1.6. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に対し,

$$\langle x, y \rangle = |x||y| \cos \theta$$

を満たす $0 \leq \theta \leq \pi$ が一意に存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 1.1.5. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に対し, 命題 1.1.6 の $0 \leq \theta \leq \pi$ を x と y のなす角の**弧度**と言う.

定義 1.1.6. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^2$ に対し,

$$d(x, y) = |x - y|$$

を x と y の**距離**と言う.

命題 1.1.7. $(\mathbb{R}^2, d)$ は**距離空間**である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (d(x, y) \geq 0) \wedge (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$.

(ii) (三角不等式) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ($x, y, z \in \mathbb{R}^2$).

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ ($x, y \in \mathbb{R}^2$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

1.2 ベクトル空間上の位相

• ベクトル空間の開集合・閉集合

定義 1.2.1. $d \in \{1, 2\}$ とする. 任意の $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ に対し,

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d; |y - x| < r\}$$

を x を中心とする半径 r の**開球**と言う.

定義 1.2.2. $d \in \{1, 2\}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, A^c を $\mathbb{R}^d$ に対する A の補集合とする.

(1) $B_r(x) \subseteq A$ を満たす $r > 0$ が存在するとき, x を A の**内点**と言う. また, A の内点全体の集合を

$$A^i = \{x \in \mathbb{R}^d; \exists r > 0, B_r(x) \subseteq A\}$$

と書き, A^i を A の**内部** (interior) または**開核** (open kernel) と言う.

(2) $B_r(x) \subseteq A^c$ を満たす $r > 0$ が存在するとき, x を A の**外点**と言う. また, A の外点全体の集合を

$$A^e = \{x \in \mathbb{R}^d; \exists r > 0, B_r(x) \subseteq A^c\}$$

と書き, A^e を A の**外部** (exterior) と言う.

(3) 任意の $r > 0$ に対して $(B_r(x) \cap A \neq \emptyset) \wedge (B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset)$ のとき, x を A の**境界点**と言う. また, A の境界点全体の集合を

$$A^f = \{x \in \mathbb{R}^d; \forall r > 0, (B_r(x) \cap A \neq \emptyset) \wedge (B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset)\}$$

と書き, A^f を A の**境界** (frontier) と言う.

(4) 任意の $r > 0$ に対して $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ のとき, x を A の**触点**と言う. また, A の触点全体の集合を

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^d; \forall r > 0, B_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

と書き, $\overline{A}$ を A の**閉包** (closure) と言う.

注意. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする.

(1) $A^i \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

(2) $\{A^i, A^f\}$ は $\overline{A}$ の**直和分解**である. つまり, 次の (i), (ii) を満たす.

(i) $A^i \cup A^f = \overline{A}$.

(ii) $A^i \cap A^f = \emptyset$.

(3) $\{A^i, A^e, A^f\}$ は $\mathbb{R}^d$ の**直和分解**である. つまり, 次の (i), (ii) を満たす.

(i) $A^i \cup A^e \cup A^f = \mathbb{R}^d$.

(ii) $A^i \cap A^e = \emptyset, A^i \cap A^f = \emptyset, A^e \cap A^f = \emptyset$.

注意. 定義 1.2.2(1) の A^i を A^o と書き, 定義 1.2.2(3) の A^f を ∂A と書くことがある.

定義 1.2.3. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする.

(1) A が開であるとは, A が $A = A^i$ を満たすことを言う. また, $\mathbb{R}^d$ の開集合全体の集合を

$$\mathcal{O} = \{U \subseteq \mathbb{R}^d ; U = U^i\}$$

と書き, $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の開集合系または位相と言う.

(2) A が閉であるとは, A が $A = \overline{A}$ を満たすことを言う. また, $\mathbb{R}^d$ の閉集合全体の集合を

$$\mathcal{A} = \{F \subseteq \mathbb{R}^d ; F = \overline{F}\}$$

と書き, $\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の閉集合系と言う.

例 ($\mathbb{R}^2$ の開球). $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $r_0 > 0$ とすると, $B_{r_0}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |x - x_0| < r_0\}$ は開である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 ($\mathbb{R}^2$ の閉球). $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $r_0 > 0$ とすると,

$$\overline{B_{r_0}(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |x - x_0| \leq r_0\}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.2.1. $d \in \{1, 2\}$ とすると, $\mathcal{A} = \{F \subseteq \mathbb{R}^d ; F^c \in \mathcal{O}\}$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とすると, 次の命題

(1) $A \notin \mathcal{O} \Rightarrow A \in \mathcal{A}$ (開でない $\Rightarrow$ 閉である).

(2) $A \notin \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{O}$ (閉でない $\Rightarrow$ 開である).

は偽である.

例 (空集合, 普遍集合). $d \in \{1, 2\}$ とする.

(1) $\emptyset \in \mathcal{O} \cap \mathcal{A}$.

(2) $\mathbb{R}^d \in \mathcal{O} \cap \mathcal{A}$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 ($\mathbb{R}^2$ の円環). $0 < a < b$ とする.

(1) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 ; a < |x| \leq b\} \notin \mathcal{O} \cup \mathcal{A}$.

(2) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 ; a \leq |x| < b\} \notin \mathcal{O} \cup \mathcal{A}$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● ベクトル空間の連結集合・コンパクト集合

定義 1.2.4. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする.

(1) A が**連結**であるとは, 次の (i), (ii) を満たす $\mathbb{R}^d$ の開集合 $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ が存在しないことを言う.

(i) $U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset$.

(ii) $\{U \cap A, V \cap A\}$ は A の直和分解である.

(2) A が**領域**であるとは, A が連結かつ開であることを言う.

定義 1.2.5. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする.

(1) A が**有界**であるとは,

$$A \subseteq \overline{B_r(x)}$$

を満たす $x \in \mathbb{R}^d, r \geq 0$ が存在することを言う.

(2) A が**コンパクト**であるとは, A が有界かつ閉であることを言う.

1.3 点列の極限

● 点列の収束・発散

定義 1.3.1. $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の点列と言う. このとき,

$$a(n) = a_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

と書き, a_n を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項と言う.

定義 1.3.2 (ε - N 論法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とする. $n \rightarrow \infty$ のとき, a_n が $\alpha \in \mathbb{R}^2$ に収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ と書く.

定義 1.3.2 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon).$$

定義 1.3.3 (M - N 論法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とする. $n \rightarrow \infty$ のとき, a_n が ∞ に発散するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $N(M) \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N(M)$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n| > M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ と書く.

定義 1.3.3 の論理式

$$\forall M > 0, \exists N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N(M) \Rightarrow |a_n| > M).$$

注意. 点列の有限個の項を付け加えたり取り除いたりしても, その点列の収束・発散には関係しない.

命題 1.3.1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とすると, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は一意である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定義 1.3.4. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とし, $a(\mathbb{N}) = \{a_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とおく. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界であるとは,

$$a(\mathbb{N}) \subseteq \overline{B_M(0)}$$

を満たす $M \geq 0$ が存在することを言う.

定義 1.3.4 の論理式

$$\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M.$$

命題 1.3.2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とする.

(1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である.

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束し, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ならば, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n| > \frac{1}{2} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 1.3.3 (和・スカラー倍の極限). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ.

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{ca_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

注意. $\mathbb{R}^2$ には全順序が存在しないので, $\mathbb{R}^2$ の点列に対する

(1) 極限の単調性

(2) はさみうちの原理

は, 命題として存在しない.

● Bolzano-Weierstrass の定理

命題 1.3.4. $\{a_n = (a_{1,n}, a_{2,n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ に収束する.
- (ii) $\{a_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}, \{a_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ に収束する.

さらに, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_{1,n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2,n} \right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.3.5. $\{a_n = (a_{1,n}, a_{2,n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ で有界である.
- (ii) $\{a_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}, \{a_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ で有界である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 1.3.5. $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像, $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とする.

- (1) n が**狭義単調増加**であるとは, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $n(k) < n(k+1)$ のことを言う.
- (2) n が狭義単調増加のとき, $a \circ n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を a の**部分列**と言う. このとき,

$$a \circ n(k) = a_{n(k)} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad a \circ n = \{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

と書き, $a_{n(k)}$ を $\{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ の**一般項**と言う.

命題 1.3.6. $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とする.

- (1) n が狭義単調増加ならば, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $k \leq n(k)$.
- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の任意の部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 1.3.1 (Bolzano-Weierstrass の定理). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とすると, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の収束する部分列が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● Cauchy の定理

定義 1.3.6. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とする. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}^2$ の **Cauchy 列** であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $m, n \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 1.3.6 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, (m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

命題 1.3.7. $\{a_n = (a_{1,n}, a_{2,n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ の Cauchy 列である.
- (ii) $\{a_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}, \{a_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.3.8. $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ の Cauchy 列である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意 (命題 1.3.8 の対偶). $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Cauchy 列でなければ, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ に収束しない.

定理 1.3.2 (Cauchy の定理). $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Cauchy 列ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ に収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. $\mathbb{R}^2$ には全順序が存在しないので, $\mathbb{R}^2$ に対する

- (1) Dedekind の公理
- (2) 上限公理
- (3) 下限公理
- (4) 単調増加収束公理
- (5) 単調減少収束公理
- (6) Archimedes の公理
- (7) Cantor の公理

は, 命題として存在しない.

第2章 多変数関数の微分法

2.1 関数の極限

● スカラー値関数の極限

定義 2.1.1. A を集合とする. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数またはスカラー値関数と言う.

定義 2.1.2 (ε - δ 論法). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in A$ に対して

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ と書く.

定義 2.1.2 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in A, (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon).$$

定義 2.1.3 (M - δ 論法). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が ∞ に発散するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $\delta(M) > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta(M)$ を満たす任意の $x \in A$ に対して

$$f(x) > M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ と書く.

定義 2.1.3 の論理式

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0, \forall x \in A, (0 < |x - a| < \delta(M) \Rightarrow f(x) > M).$$

定義 2.1.4 (M - δ 論法). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が $-\infty$ に発散するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $\delta(M) > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta(M)$ を満たす任意の $x \in A$ に対して

$$f(x) < -M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ と書く.

定義 2.1.4 の論理式

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0, \forall x \in A, (0 < |x - a| < \delta(M) \Rightarrow f(x) < -M).$$

命題 2.1.1. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が収束すれば, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は一意である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

例. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の関数 $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0))$$

によって定義すると, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき, $f(x, y)$ は収束しない.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 2.1.5. A を集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とし, $f(A) = \{f(x); x \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ とおく.

- (1) f が A で上に有界であるとは, $f(A)$ が上に有界であることを言う.
- (2) f が A で下に有界であるとは, $f(A)$ が下に有界であることを言う.
- (3) f が A で有界であるとは, $f(A)$ が有界であることを言う.

定義 2.1.5(3) の論理式

$$\exists c, d \in \mathbb{R}, c \leq d, \forall x \in A, c \leq f(x) \leq d.$$

定義 2.1.6. $A \neq \emptyset$ を集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする.

- (1) f が A で上に有界のとき, $\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$ を f の A での上限と言う.
- (2) f が A で下に有界のとき, $\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A)$ を f の A での下限と言う.

注意. $A \neq \emptyset$ を集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする.

- (1) (上限公理) f が A で上に有界ならば, $\sup_{x \in A} f(x)$ が存在する.
- (2) (下限公理) f が A で下に有界ならば, $\inf_{x \in A} f(x)$ が存在する.

命題 2.1.2. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき,

- (1) $f(x)$ が収束すれば, ある $\delta > 0$ が存在し, f は $B_\delta(a)$ で有界である.
- (2) $f(x)$ が収束し, かつ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ ならば, ある $\delta > 0$ が存在し, 任意の $x \in B_\delta(a)$ に対して

$$|f(x)| > \frac{1}{2} \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.3 (和・スカラー倍の極限). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f, g : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x), g(x)$ が収束すれば, $f(x) + g(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

が成り立つ.

(2) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が収束すれば, $cf(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.4 (積・商の極限). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f, g : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とする.

(1) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x), g(x)$ が収束すれば, $f(x)g(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

が成り立つ.

(2) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x), g(x)$ が収束し, かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ならば, $\frac{f(x)}{g(x)}$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.5 (極限の単調性). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f, g : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とする. 任意の $x \in A$, $x \neq a$ に対して $f(x) \leq g(x)$, かつ $x \rightarrow a$ のとき, $f(x), g(x)$ が収束すれば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.6 (はさみうちの原理). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f, g, h : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とする. 任意の $x \in A$, $x \neq a$ に対して $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, かつ $x \rightarrow a$ のとき, $f(x), g(x)$ が収束して $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ならば, $x \rightarrow a$ のとき, $h(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.7. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \neq a$, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となる A の任意の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$$

となる.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 2.1.1 (Cauchy の収束判定法). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $0 < |x - a|, |y - a| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x, y \in A$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

● ベクトル値関数の極限

定義 2.1.7. A を集合とする. $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を A 上の関数または 2 次ベクトル値関数と言う.

定義 2.1.8 (ε - δ 論法). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}^2$ に収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in A$ に対して

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ と書く.

定義 2.1.8 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in A, (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon).$$

定義 2.1.9 (M - δ 論法). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が ∞ に発散するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $\delta(M) > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta(M)$ を満たす任意の $x \in A$ に対して

$$|f(x)| > M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ と書く.

定義 2.1.9 の論理式

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0, \forall x \in A, (0 < |x - a| < \delta(M) \Rightarrow |f(x)| > M).$$

命題 2.1.8. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が収束すれば, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は一意である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

例. $a \in \mathbb{R}^2$, $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$x(t) = a + te \quad (t \in \mathbb{R})$$

によって定義すると, $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = a$ となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\mathbb{R}$ 上の関数 $x: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$x(t) = \left(t \cos \frac{1}{t}, t \sin \frac{1}{t} \right) \quad (t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$$

によって定義すると, $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = (0, 0)$ となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 2.1.10. A を集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を A 上の関数とし, $f(A) = \{f(x); x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$ とおく. f が A で有界であるとは,

$$f(A) \subseteq \overline{B_M(0)}$$

を満たす $M \geq 0$ が存在することを言う.

定義 2.1.10 の論理式

$$\exists M \geq 0, \forall x \in A, |f(x)| \leq M.$$

命題 2.1.9. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき,

- (1) $f(x)$ が収束すれば, ある $\delta > 0$ が存在し, f は $B_\delta(a)$ で有界である.
- (2) $f(x)$ が収束し, かつ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ ならば, ある $\delta > 0$ が存在し, 任意の $x \in B_\delta(a)$ に対して

$$|f(x)| > \frac{1}{2} \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.10 (和・スカラー倍の極限). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f, g: A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数, $c \in \mathbb{R}$ とする.

- (1) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x), g(x)$ が収束すれば, $f(x) + g(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

が成り立つ.

- (2) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が収束すれば, $cf(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.11 (合成の極限). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ をそれぞれ $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $a \in A$, $f: A \setminus \{a\} \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ $A \setminus \{a\}$, B 上の関数とすると,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

となる $b \in B$ が存在し, かつ $y \rightarrow b$ のとき, $g(y)$ が収束すれば, $x \rightarrow a$ のとき, $g \circ f$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.12. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}^2$ とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \neq a$, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となる A の任意の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$$

となる.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 2.1.2 (Cauchy の収束判定法). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $0 < |x - a|, |y - a| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x, y \in A$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 2.1.13. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f = (f_1, f_2) : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $A \setminus \{a\}$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ は $\mathbb{R}^2$ に収束する.

(ii) $x \rightarrow a$ のとき, $f_1(x), f_2(x)$ は $\mathbb{R}$ に収束する.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. $\mathbb{R}^2$ には全順序が存在しないので, 2 次ベクトル値関数に対する

(1) 極限の単調性

(2) はさみうちの原理

は, 命題として存在しない.

2.2 連続関数, 一様連続関数, 半連続関数

● スカラー値連続関数

定義 2.2.1. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする.

(1) f が $a \in A$ で連続であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

となることを言う.

(2) f が A で連続であるとは, f が任意の $a \in A$ で連続であることを言う.

定義 2.2.1(2) の論理式

$$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(a, \varepsilon) > 0, \forall x \in A, (|x - a| < \delta(a, \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

命題 2.2.1 (和・スカラー倍の連続性). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) f, g が a で連続ならば, $f + g$ は a で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a)$$

が成り立つ.

(2) f が a で連続ならば, cf は a で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cf(a)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 2.1.3). □

命題 2.2.2 (積・商の連続性). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする.

(1) f, g が a で連続ならば, fg は a で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = f(a)g(a)$$

が成り立つ.

(2) f, g が a で連続であり, かつ $g(a) \neq 0$ ならば, $\frac{f}{g}$ は a で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 2.1.4).

□

命題 2.2.3. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は a で連続である.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となる A の任意の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

となる.

証明. 省略 (命題 2.1.7).

□

● ベクトル値連続関数

定義 2.2.2. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を A 上の関数とする.

(1) f が $a \in A$ で連続であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

となることを言う.

(2) f が A で連続であるとは, f が任意の $a \in A$ で連続であることを言う.

定義 2.2.2(2) の論理式

$$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(a, \varepsilon) > 0, \forall x \in A, (|x - a| < \delta(a, \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

命題 2.2.4 (和・スカラー倍の連続性). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を A 上の関数, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) f, g が a で連続ならば, $f + g$ は a で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a)$$

が成り立つ.

(2) f が a で連続ならば, cf は a で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cf(a)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 2.1.10). □

命題 2.2.5 (合成の連続性). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ をそれぞれ $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $a \in A$, $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ をそれぞれ A , B 上の関数とすると, f, g がそれぞれ a , $f(a)$ で連続ならば, $g \circ f$ は a で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(f(a))$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 2.1.11). □

命題 2.2.6. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を A 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は a で連続である.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となる A の任意の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

となる.

証明. 省略 (命題 2.1.12).

□

命題 2.2.7. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f = (f_1, f_2) : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を A 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は a で連続である.

(ii) f_1, f_2 は a で連続である.

証明. 省略 (命題 2.1.13).

□

● スカラー値一様連続関数

定義 2.2.3 (ε - δ 論法). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする. f が A で一様連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x, y \in A$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 2.2.3 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, y \in A, (|x - y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

命題 2.2.8. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とすると, f が A で一様連続ならば, f は A で連続である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 2.2.1 (Heine-Cantor の定理). $d \in \{1, 2\}$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ のコンパクト集合, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ を K 上の関数とすると, f が K で連続ならば, f は K で一様連続である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● ベクトル値一様連続関数

定義 2.2.4 (ε - δ 論法). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を A 上の関数とする. f が A で一様連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x, y \in A$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 2.2.4 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, y \in A, (|x - y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

命題 2.2.9. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を A 上の関数とすると, f が A で一様連続ならば, f は A で連続である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 2.2.2 (Heine-Cantor の定理). $d \in \{1, 2\}$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ のコンパクト集合, $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ を K 上の関数とすると, f が K で連続ならば, f は K で一様連続である.

証明. 省略 (定理 2.2.1). □

● 半連続関数

定義 2.2.5 (ε - δ 論法). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする.

- (1) f が $a \in A$ で **上半連続** であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in A$ に対して

$$f(x) - f(a) < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

- (2) f が A で **上半連続** であるとは, f が任意の $a \in A$ で上半連続であることを言う.

定義 2.2.5(2) の論理式

$$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(a, \varepsilon) > 0, \forall x \in A, (|x - a| < \delta(a, \varepsilon) \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon).$$

定義 2.2.6 (ε - δ 論法). $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする.

- (1) f が $a \in A$ で **下半連続** であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in A$ に対して

$$f(x) - f(a) > -\varepsilon$$

が成り立つことを言う.

- (2) f が A で **下半連続** であるとは, f が任意の $a \in A$ で下半連続であることを言う.

定義 2.2.6(2) の論理式

$$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(a, \varepsilon) > 0, \forall x \in A, (|x - a| < \delta(a, \varepsilon) \Rightarrow f(x) - f(a) > -\varepsilon).$$

命題 2.2.10. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $a \in A$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) f は a で連続である.
- (ii) f は a で上半連続かつ下半連続である.

証明. 省略 (微分積分学 I).

□

● 最大値の定理

定義 2.2.7. $A \neq \emptyset$ を集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とし, $f(A) = \{f(x); x \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ とおく.

(1) $\max f(A)$ が存在するとき, $\max_{x \in A} f(x) = \max f(A)$ を f の A での**最大値**と言う.

(2) $\min f(A)$ が存在するとき, $\min_{x \in A} f(x) = \min f(A)$ を f の A での**最小値**と言う.

定義 2.2.8. A を集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする.

(1) f が $x_0 \in A$ で**最大**であるとは,

$$f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$$

が成り立つことを言う.

(2) f が $x_0 \in A$ で**最小**であるとは,

$$f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$$

が成り立つことを言う.

補題 2.2.1 (有界性の定理). $d \in \{1, 2\}$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ のコンパクト集合, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ を K 上の関数とする.

(1) f が K で上半連続ならば, f は K で上に有界である.

(2) f が K で下半連続ならば, f は K で下に有界である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.2.3 (最大値の定理). $d \in \{1, 2\}$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ のコンパクト集合, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ を K 上の関数とする.

(1) f が K で上半連続ならば, f の K での最大値が存在する.

(2) f が K で下半連続ならば, f の K での最小値が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.2.4. $d \in \{1, 2\}$, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ のコンパクト集合, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ を K 上の関数とすると, f が K で連続ならば, f の K での最大値・最小値が存在し,

$$c = \min_{x \in K} f(x), \quad d = \max_{x \in K} f(x)$$

とおくと, $f(K) \subseteq [c, d]$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

2.3 全導関数と接平面

• 正方行列空間

定義 2.3.1. $a_{ij} \in \mathbb{R} ((i, j) \in \{1, 2\}^2)$ を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

のように並べたものを **2 次正方行列** と言う. また, 2 次正方行列全体の集合を

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ; a_{ij} \in \mathbb{R} ((i, j) \in \{1, 2\}^2) \right\}$$

と書く.

定義 2.3.2. 2 次正方行列の相等・加法・スカラー乗法を

(1) (相等) $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}), (A = B \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \{1, 2\}^2, a_{ij} = b_{ij})$.

(2) (加法) $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} (A, B \in M_2(\mathbb{R}))$.

(3) (スカラー乗法) $cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix} (c \in \mathbb{R}, A \in M_2(\mathbb{R}))$.

によって定義する.

命題 2.3.1. $M_2(\mathbb{R})$ は 2 次正方行列の加法・スカラー乗法について線型空間である. つまり, 次の (i)–(viii) を満たす.

(i) $(A + B) + C = A + (B + C) (A, B, C \in M_2(\mathbb{R}))$.

(ii) $\exists! O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \forall A \in M_2(\mathbb{R}), A + O = A = O + A$.

(iii) $\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \exists! -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), A + (-A) = O = (-A) + A$.

(iv) $A + B = B + A (A, B \in M_2(\mathbb{R}))$.

(v) $(cd)A = c(dA) (c, d \in \mathbb{R}, A \in M_2(\mathbb{R}))$.

(vi) $1A = A (A \in M_2(\mathbb{R}))$.

(vii) $(c + d)A = cA + dA (c, d \in \mathbb{R}, A \in M_2(\mathbb{R}))$.

(viii) $c(A + B) = cA + cB (c \in \mathbb{R}, A, B \in M_2(\mathbb{R}))$.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

注意 (減法). (iii) の $A + (-B)$ を $A - B$ と書く.

• 正方行列空間上の内積・ノルム・距離

定義 2.3.3. 任意の $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ に対し,

$$\langle A, B \rangle = \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(2,2)} a_{ij}b_{ij}$$

を A と B の内積と言う.

命題 2.3.2. $(M_2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は内積空間である. つまり, 次の (i)–(iv) を満たす.

$$(i) \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R}), (\langle A, A \rangle \geq 0) \wedge (\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow A = O).$$

$$(ii) \quad \langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle \quad (A, B \in M_2(\mathbb{R})).$$

$$(iii) \quad \langle A + B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle \quad (A, B, C \in M_2(\mathbb{R})).$$

$$(iv) \quad \langle cA, B \rangle = c\langle A, B \rangle \quad (c \in \mathbb{R}, A, B \in M_2(\mathbb{R})).$$

証明. 省略 (命題 1.1.2). □

定義 2.3.4. 任意の $A \in M_2(\mathbb{R})$ に対し,

$$|A| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$$

を A のノルムまたは絶対値と言う.

命題 2.3.3.

$$(1) \quad |a_1| \leq |A| \quad (A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})).$$

$$(2) \quad |a_2| \leq |A| \quad (A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})).$$

$$(3) \quad |A| \leq |a_1| + |a_2| \quad (A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})).$$

証明. 省略 (命題 1.1.3). □

命題 2.3.4 (Schwarz の不等式). 任意の $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ に対して

$$|\langle A, B \rangle| \leq |A||B|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 1.1.4). □

命題 2.3.5. $(M_2(\mathbb{R}), |\cdot|)$ はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

$$(i) \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R}), (|A| \geq 0) \wedge (|A| = 0 \Leftrightarrow A = O).$$

$$(ii) \quad (\text{三角不等式}) \quad |A + B| \leq |A| + |B| \quad (A, B \in M_2(\mathbb{R})).$$

$$(iii) \quad |cA| = |c||A| \quad (c \in \mathbb{R}, A \in M_2(\mathbb{R})).$$

証明. 省略 (命題 1.1.5). □

命題 2.3.6. 任意の $A, B \in M_2(\mathbb{R}) \setminus \{O\}$ に対し,

$$\langle A, B \rangle = |A||B| \cos \theta$$

を満たす $0 \leq \theta \leq \pi$ が一意に存在する.

証明. 省略 (命題 1.1.6). □

定義 2.3.5. 任意の $A, B \in M_2(\mathbb{R}) \setminus \{O\}$ に対し, 命題 2.3.6 の $0 \leq \theta \leq \pi$ を A と B のなす角の**弧度**と言う.

定義 2.3.6. 任意の $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ に対し,

$$d(A, B) = |A - B|$$

を A と B の**距離**と言う.

命題 2.3.7. $(M_2(\mathbb{R}), d)$ は距離空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}), (d(A, B) \geq 0) \wedge (d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B)$.

(ii) (三角不等式) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ ($A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$).

(iii) $d(A, B) = d(B, A)$ ($A, B \in M_2(\mathbb{R})$).

証明. 省略 (命題 1.1.7). □

● スカラー値関数の方向導関数・偏導関数

定義 2.3.7. $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数とする.

(1) f が $a \in U$ で e 方向に微分可能であるとは,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he) - f(a)}{h} = \alpha$$

となる $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在することを言う. このとき, $\alpha = \frac{\partial f}{\partial e}(a)$ と書き, $\frac{\partial f}{\partial e}(a)$ を f の a での e 方向の微分係数と言う.

(2) f が U で e 方向に微分可能であるとは, f が任意の $a \in U$ で e 方向に微分可能であることを言う. このとき, $\frac{\partial f}{\partial e}: U \rightarrow \mathbb{R}$ を f の e 方向の導関数と言う.

例. $e = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ とし, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

によって定義すると, $ab = 0$ ならば, f は $(0, 0)$ で e 方向に微分可能であり, $\frac{\partial f}{\partial e}(0, 0) = 0$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 2.3.8. $\{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の標準基底, $i \in \{1, 2\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数とする.

(1) f が $a \in U$ で x_i について偏微分可能であるとは,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h} = \alpha$$

となる $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在することを言う. このとき, $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ と書き, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ を f の a での x_i についての偏微分係数と言う.

(2) f が U で x_i について偏微分可能であるとは, f が任意の $a \in U$ で x_i について偏微分可能であることを言う. このとき, $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow \mathbb{R}$ を f の x_i についての偏導関数と言う.

例. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x + y^2 \neq 0\}$ とおき, U 上の関数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{3x + y^2} \quad ((x, y) \in U)$$

によって定義すると, f は U で x, y について偏微分可能であり,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2 y + 2xy^3}{(3x + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3x^3 - x^2 y^2}{(3x + y^2)^2} \quad ((x, y) \in U)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

定義 2.3.9. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の任意の $i \in \{1, 2\}$ に対する x_i について偏微分可能な関数とする.

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right) \quad (x \in U)$$

によって定義される $\operatorname{grad} f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を f の **勾配** (gradient) と言う.

● ベクトル値関数の方向導関数・偏導関数

定義 2.3.10. $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の関数とする.

(1) f が $a \in U$ で e 方向に微分可能であるとは,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he) - f(a)}{h} = \alpha$$

となる $\alpha \in \mathbb{R}^2$ が存在することを言う. このとき, $\alpha = \frac{\partial f}{\partial e}(a)$ と書き, $\frac{\partial f}{\partial e}(a)$ を f の a での e 方向の微分係数と言う.

(2) f が U で e 方向に微分可能であるとは, f が任意の $a \in U$ で e 方向に微分可能であることを言う. このとき, $\frac{\partial f}{\partial e} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を f の e 方向の導関数と言う.

命題 2.3.8. $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f = (f_1, f_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は a で e 方向に微分可能である.

(ii) f_1, f_2 は a で e 方向に微分可能である.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば,

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial e}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial e}(a) \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 2.3.11. $\{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の標準基底, $i \in \{1, 2\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の関数とする.

(1) f が $a \in U$ で x_i について偏微分可能であるとは,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h} = \alpha$$

となる $\alpha \in \mathbb{R}^2$ が存在することを言う. このとき, $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ と書き, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ を f の a での x_i についての偏微分係数と言う.

(2) f が U で x_i について偏微分可能であるとは, f が任意の $a \in U$ で x_i について偏微分可能であることを言う. このとき, $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を f の x_i についての偏導関数と言う.

定義 2.3.12. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の任意の $i \in \{1, 2\}$ に対する x_i について偏微分可能な関数とする.

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \quad (x \in U)$$

によって定義される $J_f : U \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ を f の **Jacobi 行列** と言う.

● スカラー値関数の全導関数

定義 2.3.13. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数とする.

(1) f が $a \in U$ で全微分可能であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \langle \alpha, x - a \rangle}{|x - a|} = 0$$

となる $\alpha \in \mathbb{R}^2$ が存在することを言う. このとき, $\alpha = f'(a)$ と書き, $f'(a)$ を f の a での全微分係数と言う.

(2) f が U で全微分可能であるとは, f が任意の $a \in U$ で全微分可能であることを言う. このとき, $f': U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を f の全導関数と言う.

例. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ とし, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \langle (a, b), (x, y) \rangle \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義すると, f は $\mathbb{R}^2$ で全微分可能であり, $f'(x, y) = (a, b) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.3.9. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数とすると, f が a で全微分可能ならば, f は a で連続である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.3.10. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数とすると, f が a で全微分可能ならば, 任意の $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に対して f は a で e 方向に微分可能であり,

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \langle f'(a), e \rangle$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.3.11. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数とすると, f が a で全微分可能ならば, 任意の $i \in \{1, 2\}$ に対して f は a で x_i について偏微分可能であり,

$$f'(a) = \text{grad} f(a)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.3.12. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数とすると, 任意の $i \in \{1, 2\}$ に対して f が U で x_i について偏微分可能であり, かつ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ が U で連続ならば, f は U で全微分可能である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.3.13 (和・スカラー倍の全微分可能性). $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) f, g が a で全微分可能ならば, $f + g$ は a で全微分可能であり,

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

が成り立つ.

(2) f が a で全微分可能ならば, cf は a で全微分可能であり,

$$(cf)'(a) = cf'(a)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.3.14 (積・商の全微分可能性). $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数とする.

(1) f, g が a で全微分可能ならば, fg は a で全微分可能であり,

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

が成り立つ.

(2) f, g が a で全微分可能であり, かつ $g(a) \neq 0$ ならば, $\frac{f}{g}$ は a で全微分可能であり,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● ベクトル値関数の全導関数

定義 2.3.14. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の関数とする.

(1) f が $a \in U$ で全微分可能であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|} = 0$$

となる $A \in M_2(\mathbb{R})$ が存在することを言う. このとき, $A = f'(a)$ と書き, $f'(a)$ を f の a での全微分係数と言う.

(2) f が U で全微分可能であるとは, f が任意の $a \in U$ で全微分可能であることを言う. このとき, $f': U \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ を f の全導関数と言う.

例. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とし, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義すると, f は $\mathbb{R}^2$ で全微分可能であり, $f'(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.3.15. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の関数とするとき, f が a で全微分可能ならば, f は a で連続である.

証明. 省略 (命題 2.3.9). □

命題 2.3.16. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の関数とするとき, f が a で全微分可能ならば, 任意の $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に対して f は a で e 方向に微分可能であり,

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = f'(a)e$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 2.3.10). □

命題 2.3.17. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の関数とするとき, f が a で全微分可能ならば, 任意の $i \in \{1, 2\}$ に対して f は a で x_i について偏微分可能であり,

$$f'(a) = J_f(a)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 2.3.11). □

命題 2.3.18. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の関数とするとき, 任意の $i \in \{1, 2\}$ に対して f が U で x_i について偏微分可能であり, かつ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ が U で連続ならば, f は U で全微分可能である.

証明. 省略 (命題 2.3.12). □

命題 2.3.19 (和・スカラー倍の全微分可能性). $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の関数, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) f, g が a で全微分可能ならば, $f + g$ は a で全微分可能であり,

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

が成り立つ.

(2) f が a で全微分可能ならば, cf は a で全微分可能であり,

$$(cf)'(a) = cf'(a)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 2.3.13). □

命題 2.3.20 (合成の全微分可能性). $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ U, V 上の関数とすると, f, g がそれぞれ $a, f(a)$ で全微分可能ならば, $g \circ f$ は a で全微分可能であり,

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

が成り立つ. さらに,

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

の成分を書き下せば,

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(a)) \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(a)) \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a) \quad (i \in \{1, 2\})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (極座標変換). $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上の関数 $\varphi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (r > 0, \theta \in \mathbb{R})$$

によって定義する. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の全微分可能関数とすると, $g = f \circ \varphi$ は $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ (極座標) で全微分可能であり,

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (極座標逆変換). $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上の関数 $\psi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を

$$\psi(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right) \quad (x > 0, y \in \mathbb{R})$$

によって定義する. $g : (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ を $(0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上の全微分可能関数とすると, $f = g \circ \psi$ は $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ (直交座標) で全微分可能であり,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.3.21. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f = (f_1, f_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は a で全微分可能である.

(ii) f_1, f_2 は a で全微分可能である.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば,

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ f'_2(a) \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 接平面

定義 2.3.15. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする.

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} ; x \in A, y = f(x)\}$$

を f のグラフと言う.

命題 2.3.22. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は a で全微分可能である.

(ii) $f(x) - f(a) = \langle \alpha, x - a \rangle + o(|x - a|)$ ($x \rightarrow a$) を満たす $\alpha \in \mathbb{R}^2$ が存在する.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば, $f'(a) = \alpha$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 2.3.16. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の a で全微分可能な関数とする.

$$T_a(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} ; y - f(a) = \langle f'(a), x - a \rangle\}$$

を $G(f)$ の $(a, f(a))$ での接平面と言う.

第3章 Taylor の定理, 陰関数定理

3.1 高階偏導関数

● 多重指数

定義 3.1.1. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ を

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

のように並べたものを**多重指数**と言う. また, 多重指数全体の集合を

$$\mathbb{N}^2 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) ; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}\}$$

と書く.

定義 3.1.2. 多重指数の相等・加法・スカラー乗法を

(1) (相等) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2, (\alpha = \beta \Leftrightarrow (\alpha_1 = \beta_1) \wedge (\alpha_2 = \beta_2)).$

(2) (加法) $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) \ (\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2).$

(3) (スカラー乗法) $m\alpha = (m\alpha_1, m\alpha_2) \ (m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^2).$

によって定義する.

命題 3.1.1. $\mathbb{N}^2$ は多重指数の加法・スカラー乗法について次の (i)–(viii) を満たす.

(i) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \ (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^2).$

(ii) $\exists! 0 = (0, 0) \in \mathbb{N}^2, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$

(iii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2, ((\alpha_1 \geq \beta_1) \wedge (\alpha_2 \geq \beta_2) \Rightarrow \alpha + (-\beta) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2)).$

(iv) $\alpha + \beta = \beta + \alpha \ (\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2).$

(v) $(mn)\alpha = m(n\alpha) \ (m, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^2).$

(vi) $(m + n)\alpha = m\alpha + n\alpha \ (m, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^2).$

(vii) $m(\alpha + \beta) = m\alpha + m\beta \ (m \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2).$

(viii) $\exists! 1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, 1\alpha = \alpha.$

証明. 省略 (命題 1.1.1).

□

注意 (減法). (iii) の $\alpha + (-\beta)$ を $\alpha - \beta$ と書く.

定義 3.1.3. 多重指数の順序・長さ・階乗を

(1) (順序) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2, (\alpha \leq \beta \Leftrightarrow (\alpha_1 \leq \beta_1) \wedge (\alpha_2 \leq \beta_2))$.

(2) (長さ) $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \ (\alpha \in \mathbb{N}^2)$.

(3) (階乗) $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ (\alpha \in \mathbb{N}^2)$.

によって定義する.

定義 3.1.4.

(1) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\binom{\alpha}{\beta} = \begin{cases} 1 & (\beta = 0), \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\beta+1)}{\beta!} & (\beta \geq 1) \end{cases}$$

を二項係数と言う.

(2) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$ に対し,

$$\binom{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_2}{\beta_2} & (\alpha \geq \beta), \\ 0 & (\alpha \not\geq \beta) \end{cases}$$

を二項係数と言う.

● n 階偏導関数

定義 3.1.5. $d \in \{1, 2\}$, $\{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の標準基底, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ を U 上の関数とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対し, 次の (i), (ii) によって帰納的に定義される $f^{(\alpha)} : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = n$) を f の n 階偏導関数と言う.

$$(i) \quad f^{(0)} = f.$$

$$(ii) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq n-1, \exists i \in \{1, 2\}, (f^{(\alpha)} : U \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ が } U \text{ で } x_i \text{ について偏微分可能ならば, } f^{(\alpha+e_i)} \text{ を}$$

$$f^{(\alpha+e_i)} = \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial x_i}$$

によって定義する).

例. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 > y\}$ とおき, U 上の関数 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \log(x^2 - y) \quad ((x, y) \in U)$$

によって定義すると,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2(x^2 + y)}{(x^2 - y)^2} \quad ((x, y) \in U),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{2x}{(x^2 - y)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad ((x, y) \in U),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{1}{(x^2 - y)^2} \quad ((x, y) \in U)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.1.6. $d \in \{1, 2\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ を U 上の関数とする.

(1) f が U で n 回連続微分可能または C^n 級 ($n \in \mathbb{N}$) であるとは, 任意の $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq n$ に対して $f^{(\alpha)}$ が定義され, $f^{(\alpha)}$ が U で連続であることを言う.

(2) f が U で無限回微分可能または C^∞ 級であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して f が U で C^n 級であることを言う.

定義 3.1.7. 2 次ベクトルの冪・偏微分を

$$(1) \text{ (冪) } x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \quad (x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{N}^2).$$

$$(2) \text{ (偏微分) } \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \quad (x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{N}^2).$$

によって定義する.

命題 3.1.2. $d \in \{1, 2\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ を U 上の C^n 関数とすると, 任意の $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq n$ に対して $f^{(\alpha)}$ は $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ の順序に依存せず定義される.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

注意. $d \in \{1, 2\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ を U 上の C^n 級関数とすると, 任意の $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \leq n$ に対して

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x) \quad (x \in U)$$

が成り立つ.

命題 3.1.3 (二項定理). 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} x^\alpha \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

3.2 Taylor の定理と関数の極大・極小

● 多重指数と Taylor の定理

補題 3.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^{n+1} 級関数とすると, 任意の $x \in I$ に対し,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}((1-\theta(x))a + \theta(x)x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

を満たす $0 < \theta(x) < 1$ が存在する. さらに, $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}((1-\theta(x))a + \theta(x)x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ とおくと, $R_n(x) = o((x-a)^n) \ (x \rightarrow a)$.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 3.2.1 (Taylor の定理). $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の C^{n+1} 級関数とすると, $\{(1-t)a + tx; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U$ を満たす任意の $x \in U$ に対し,

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{f^{(\alpha)}((1-\theta(x))a + \theta(x)x)}{\alpha!} (x-a)^\alpha$$

を満たす $0 < \theta(x) < 1$ が存在する. さらに, $R_n(x) = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{f^{(\alpha)}((1-\theta(x))a + \theta(x)x)}{\alpha!} (x-a)^\alpha$ とおくと, $R_n(x) = o(|x-a|^n) \ (x \rightarrow a)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 双線型形式, 2 次形式

定義 3.2.1. $A \in M_2(\mathbb{R})$ とする.

(1)

$$B_A(x, y) = \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(2,2)} a_{ij}x_iy_j \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義される $B_A: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を A を係数行列とする **双線型形式** と言う.

(2)

$$Q_A(x) = B_A(x, x) \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義される $Q_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を A を係数行列とする **2 次形式** と言う.

定義 3.2.2. $A \in M_2(\mathbb{R})$ とする. A が**対称** (または**自己共役**) であるとは, A が $A = {}^tA$ を満たすことを言う. また, 2 次対称行列全体の集合を

$$S_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) ; A = {}^tA\}$$

と書く.

命題 3.2.1. $A \in S_2(\mathbb{R})$ とする.

$$(1) \quad Q_A(x+y) = Q_A(x) + 2B_A(x, y) + Q_A(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^2).$$

$$(2) \quad Q_A(ax) = a^2Q_A(x) \quad (a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.2.3. $A \in S_2(\mathbb{R})$ とする.

(1) A が**正値**であるとは, 任意の $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に対して $Q_A(x) > 0$ のことを言う.

(2) A が**負値**であるとは, 任意の $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に対して $Q_A(x) < 0$ のことを言う.

(3) A が**不定値**であるとは, $Q_A(x^+) > 0, Q_A(x^-) < 0$ を満たす $x^\pm \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ が存在することを言う.

定義 3.2.4. $A \in M_2(\mathbb{R})$ とする.

(1) $\text{tr}A = a_{11} + a_{22}$ を A の**跡** (trace) と言う.

(2) $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ を A の**行列式** (determinant) と言う.

命題 3.2.2. $A \in S_2(\mathbb{R})$ とする.

(1) A は正値 $\Leftrightarrow a_{11} > 0, \det A > 0$.

(2) A は負値 $\Leftrightarrow a_{11} < 0, \det A > 0$.

(3) A は不定値 $\Leftrightarrow \det A < 0$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● Hesse 行列と関数の極大・極小

定義 3.2.5. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の C^2 級関数とする.

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) \end{pmatrix} \quad (x \in U)$$

によって定義される $H_f: U \rightarrow S_2(\mathbb{R})$ を f の **Hesse 行列** と言う.

命題 3.2.3. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の C^2 級関数とする.

$$(1) \ H_f(a) \text{ は正値} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) > 0, \det H_f(a) > 0.$$

$$(2) \ H_f(a) \text{ は負値} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) < 0, \det H_f(a) > 0.$$

$$(3) \ H_f(a) \text{ は不定値} \Leftrightarrow \det H_f(a) < 0.$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.2.6. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数とする.

(1) f が $a \in U$ で **極大** であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in U$ に対して

$$f(x) \leq f(a)$$

が成り立つことを言う.

(2) f が $a \in U$ で **極小** であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in U$ に対して

$$f(x) \geq f(a)$$

が成り立つことを言う.

定義 3.2.7. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数とする.

(1) f が $a \in U$ で **狭義極大** であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in U$ に対して

$$f(x) < f(a)$$

が成り立つことを言う.

(2) f が $a \in U$ で **狭義極小** であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in U$ に対して

$$f(x) > f(a)$$

が成り立つことを言う.

定義 3.2.8. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の関数とする. f が $a \in U$ で鞍(くら)または峠(とうげ)であるとは, ある $\delta > 0$, $x^\pm \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ が存在し,

$$\varphi^-(t) = f(a + tx^-), \quad \varphi^+(t) = f(a + tx^+) \quad (-\delta < t < \delta)$$

によって定義される $\varphi^-, \varphi^+ : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ が 0 でそれぞれ狭義極大, 狭義極小であることを言う.

命題 3.2.4. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の全微分可能関数とすると, f が a で極大または極小ならば, $f'(a) = 0$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.2.9. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の全微分可能関数とする. $f'(a) = 0$ を満たす $a \in U$ を f の停留点と言う.

命題 3.2.5. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の C^2 級関数, $a \in U$ を f の停留点とする.

- (1) $H_f(a)$ が正値ならば, f は a で狭義極小である.
- (2) $H_f(a)$ が負値ならば, f は a で狭義極大である.
- (3) $H_f(a)$ が不定値ならば, f は a で鞍である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義すると, f は $(1, 1)$ で狭義極小であり, $(0, 0)$ で鞍である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

3.3 陰関数定理と関数の条件付き極値

● 陰関数定理, 逆関数定理

定義 3.3.1. $d \in \{1, 2\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $V \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の開集合, $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^d$ を $U \times V$ 上の関数とする.

(1) $y \in V$ とする.

$$f^y(x) = f(x, y) \quad (x \in U)$$

によって定義される $f^y : U \rightarrow \mathbb{R}$ を f の y 切片と言う.

(2) $y \in V$, f^y は U で全微分可能であるとする.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (f^y)'(x) \quad (x \in U)$$

によって定義される $\frac{\partial f}{\partial x}(*, y) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を f の x についての全導関数と言う.

定理 3.3.1 (陰関数定理 I). $d \in \{1, 2\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の開集合, $a \in U$, $V \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の開集合, $b \in V$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を $U \times V$ 上の C^n 級関数とすると,

$$f(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

ならば, 次の (i), (ii) を満たす $\mathbb{R}^d$ の開集合 $U' \subseteq U$, $\mathbb{R}$ の開集合 $V' \subseteq V$ と U' 上の C^n 級関数 $\varphi : U' \rightarrow V'$ が存在する.

(i) $a \in U'$, $b \in V'$, $\varphi(a) = b$.

(ii) $\forall x \in U', \forall y \in V', (f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x))$.

さらに,

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) \quad (x \in U')$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.3.2. $d \in \{1, 2\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の開集合, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $U \times V$ 上の関数とする.

(1) $x \in U$ とする.

$$f_x(y) = f(x, y) \quad (y \in V)$$

によって定義される $f_x : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ を f の x 切片と言う.

(2) $x \in U$, f_x は V で全微分可能であるとする.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (f_x)'(y) \quad (y \in V)$$

によって定義される $\frac{\partial f}{\partial y}(x, *) : V \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ を f の y についての全導関数と言う.

定理 3.3.2 (陰関数定理 II). $d \in \{1, 2\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の開集合, $a \in U$, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $b \in V$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $U \times V$ 上の C^n 級関数とするとき,

$$f(a, b) = 0, \quad \det \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

ならば, 次の (i), (ii) を満たす $\mathbb{R}^d$ の開集合 $U' \subseteq U$, $\mathbb{R}^2$ の開集合 $V' \subseteq V$ と U' 上の C^n 級関数 $\varphi : U' \rightarrow V'$ が存在する.

$$(i) \quad a \in U', \quad b \in V', \quad \varphi(a) = b.$$

$$(ii) \quad \forall x \in U', \quad \forall y \in V', \quad (f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)).$$

さらに,

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) \quad (x \in U')$$

が成り立つ.

証明. 省略 (定理 3.3.1). □

定理 3.3.3 (逆関数定理). $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の C^n 級関数とするとき,

$$\det f'(a) \neq 0$$

ならば, 次の (i), (ii) を満たす $\mathbb{R}^2$ の開集合 $U' \subseteq U$, $\mathbb{R}^2$ の開集合 $V' \subseteq \mathbb{R}^2$ と V' 上の C^n 級関数 $g : V' \rightarrow U'$ が存在する.

$$(i) \quad a \in U', \quad f(a) \in V'.$$

$$(ii) \quad f \text{ は } U' \text{ から } V' \text{ への全単射であり, } g = (f|_{U'})^{-1}.$$

さらに,

$$g'(f(x)) = f'(x)^{-1} \quad (x \in U')$$

が成り立つ.

証明. 省略 (定理 3.3.2). □

● Lagrange の乗数法と関数の条件付き極値

命題 3.3.1 (Lagrange の乗数法). $U, V \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の開集合, $f, g : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を $U \times V$ 上の C^1 級関数とする. $C = \{(x, y) \in U \times V ; g(x, y) = 0\}$ とおくとき, f が $(a, b) \in C$ で極大または極小ならば, $f, g, (a, b)$ は次の (i), (ii) のいずれか一つだけを満たす.

(i) $g'(a, b) = 0$.

(ii) $U \times V \times \mathbb{R}$ 上の関数 $\varphi : U \times V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\varphi(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \quad ((x, y) \in U \times V, \lambda \in \mathbb{R})$$

によって定義すると, $\varphi'(a, b, \gamma) = 0$ を満たす $\gamma \in \mathbb{R}$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$ とおき, C 上の関数 $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = x - 2y \quad ((x, y) \in C)$$

によって定義すると, f は $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ で最大であり, $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ で最小である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第4章 多変数関数の積分法

4.1 有界閉区間での多重積分

● 多重積分

定義 4.1.1. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする.

(1) $\Delta = \{(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}) ; (k_1, k_2) \in \{0, 1, \dots, n_1\} \times \{0, 1, \dots, n_2\}\}$ が I の分割であるとは, Δ が

$$a_1 = x_{1,0} < x_{1,1} < \dots < x_{1,n_1} = b_1,$$

$$a_2 = x_{2,0} < x_{2,1} < \dots < x_{2,n_2} = b_2$$

を満たすことを言う. また, I の分割全体の集合を $\mathcal{D}(I)$ と書く.

(2) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ に対し,

$$I_{(k_1, k_2)} = [x_{1,k_1-1}, x_{1,k_1}] \times [x_{2,k_2-1}, x_{2,k_2}] \quad ((k_1, k_2) \in \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\})$$

を I の Δ による小区間と言う. さらに,

$$d(I_{(k_1, k_2)}) = \sqrt{(x_{1,k_1} - x_{1,k_1-1})^2 + (x_{2,k_2} - x_{2,k_2-1})^2} \quad ((k_1, k_2) \in \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\})$$

を $I_{(k_1, k_2)}$ の直径と言い,

$$d(\Delta) = \max_{(k_1, k_2) \in \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\}} d(I_{(k_1, k_2)})$$

を Δ の幅と言う.

(3) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ に対し, $\xi = \{(\xi_{1,k_1}, \xi_{2,k_2}) ; (k_1, k_2) \in \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\}\}$ が Δ の代表点系であるとは, ξ が

$$x_{1,0} \leq \xi_{1,1} \leq x_{1,1}, \quad \dots, \quad x_{1,n_1-1} \leq \xi_{1,n_1} \leq x_{1,n_1},$$

$$x_{2,0} \leq \xi_{2,1} \leq x_{2,1}, \quad \dots, \quad x_{2,n_2-1} \leq \xi_{2,n_2} \leq x_{2,n_2}$$

を満たすことを言う. また, Δ の代表点系全体の集合を $\mathcal{X}(\Delta)$ と書く.

(4) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ に対し,

$$S(f; \Delta, \xi) = \sum_{(k_1, k_2) = (1, 1)}^{(n_1, n_2)} f(\xi_{1,k_1}, \xi_{2,k_2}) (x_{1,k_1} - x_{1,k_1-1}) (x_{2,k_2} - x_{2,k_2-1}) \quad (\xi \in \mathcal{X}(\Delta))$$

によって定義される $S(f; \Delta, *) : \mathcal{X}(\Delta) \rightarrow \mathbb{R}$ を f の Δ による **Riemann 和**と言う.

定義 4.1.2 (ε - δ 論法). $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする. $d(\Delta) \rightarrow +0$ のとき, $S(f; \Delta, *)$ が $R \in \mathbb{R}$ に I で**一様収束**するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $d(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ に対して

$$\sup_{\xi \in \mathcal{X}(\Delta)} |S(f; \Delta, \xi) - R| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} S(f; \Delta, *) = R$ と書く.

定義 4.1.2 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \Delta \in \mathcal{D}(I), \left(d(\Delta) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{\xi \in \mathcal{X}(\Delta)} |S(f; \Delta, \xi) - R| < \varepsilon \right).$$

定義 4.1.3. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする. f が I で**可積分**であるとは,

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} S(f; \Delta, *) = R$$

となる $R \in \mathbb{R}$ が存在することを言う. このとき,

$$R = \iint_I f(x) dx \left(= \iint_I f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right)$$

と書き, $\iint_I f(x) dx$ を f の I での**積分**と言う.

注意. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおくと, 1 は I で可積分であり,

$$\iint_I 1 dx = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

が成り立つ. これより,

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = a(I)$$

と書き, $a(I)$ を I の**面積**と言う.

• 上積分・下積分

定義 4.1.4. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする. 任意の $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ に対し,

$$\begin{aligned}\overline{S}(f; \Delta) &= \sum_{(k_1, k_2)=(1,1)}^{(n_1, n_2)} \sup_{x \in I_{(k_1, k_2)}} f(x)(x_{1, k_1} - x_{1, k_1-1})(x_{2, k_2} - x_{2, k_2-1}), \\ \underline{S}(f; \Delta) &= \sum_{(k_1, k_2)=(1,1)}^{(n_1, n_2)} \inf_{x \in I_{(k_1, k_2)}} f(x)(x_{1, k_1} - x_{1, k_1-1})(x_{2, k_2} - x_{2, k_2-1})\end{aligned}$$

をそれぞれ f の Δ による **Riemann 上限和**, **Riemann 下限和** と言う.

命題 4.1.1. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする.

(1) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ に対して

$$\inf_{x \in I} f(x)(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \leq \underline{S}(f; \Delta) \leq \overline{S}(f; \Delta) \leq \sup_{x \in I} f(x)(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

が成り立つ.

(2) $\Delta \subseteq \Delta'$ を満たす任意の $\Delta, \Delta' \in \mathcal{D}(I)$ に対して

$$\underline{S}(f; \Delta) \leq \underline{S}(f; \Delta'),$$

$$\overline{S}(f; \Delta) \geq \overline{S}(f; \Delta')$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定義 4.1.5. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする.

$$\overline{S}(f) = \inf_{\Delta \in \mathcal{D}(I)} \overline{S}(f; \Delta),$$

$$\underline{S}(f) = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}(I)} \underline{S}(f; \Delta)$$

をそれぞれ f の I での**上積分**, **下積分** と言う.

命題 4.1.2. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする.

(1) 任意の $\Delta, \Delta' \in \mathcal{D}(I)$ に対して

$$\underline{S}(f, \Delta) \leq \overline{S}(f; \Delta')$$

が成り立つ.

(2) $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

• Darboux の可積分条件

補題 4.1.1 (はさみうちの原理). $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする. $d(\Delta) \rightarrow +0$ のとき, $\underline{S}(f; \Delta)$, $\overline{S}(f; \Delta)$ が I で一様収束し, かつ $\lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} \underline{S}(f; \Delta) = \lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} \overline{S}(f; \Delta)$ ならば, f は I で可積分であり,

$$\iint_I f(x) dx = \lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} \underline{S}(f; \Delta) = \lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} \overline{S}(f; \Delta)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定理 4.1.1 (Darboux の定理). $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とすると,

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} \underline{S}(f; \Delta) = \underline{S}(f),$$

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} \overline{S}(f; \Delta) = \overline{S}(f)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定理 4.1.2 (Darboux の可積分条件). $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とすると, 次の (i)–(iii) は互いに同値である.

(i) f は I で可積分である.

(ii) $\lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} (\overline{S}(f; \Delta) - \underline{S}(f; \Delta)) = 0$.

(iii) $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$.

さらに, f が (i)–(iii) のいずれか一つを満たせば,

$$\iint_I f(x) dx = \underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

● 可積分関数と多重積分

命題 4.1.3 (和・スカラー倍の可積分性). $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) f, g が I で可積分ならば, $f + g$ は I で可積分であり,

$$\iint_I (f(x) + g(x)) dx = \iint_I f(x) dx + \iint_I g(x) dx$$

が成り立つ.

(2) f が I で可積分ならば, cf は I で可積分であり,

$$\iint_I cf(x) dx = c \iint_I f(x) dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 4.1.4 (積・商の可積分性). $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする.

(1) f, g が I で可積分ならば, fg は I で可積分である.

(2) f, g が I で可積分であり, かつ $\frac{1}{g}$ が I で有界ならば, $\frac{f}{g}$ は I で可積分である.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 4.1.5 (積分の単調性). $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とすると, $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, かつ f, g が I で可積分ならば,

$$\iint_I f(x) dx \leq \iint_I g(x) dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 4.1.6 (積分の三角不等式). $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とすると, f が I で可積分ならば, $|f|$ は I で可積分であり,

$$\left| \iint_I f(x) dx \right| \leq \iint_I |f(x)| dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

● 累次積分

定義 4.1.6. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

(1) $a_1 \leq x_1 \leq b_1$ とする.

$$f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2) \quad (a_2 \leq x_2 \leq b_2)$$

によって定義される $f_{x_1} : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ を f の x_1 切片と言う.

(2) $a_2 \leq x_2 \leq b_2$ とする.

$$f^{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2) \quad (a_1 \leq x_1 \leq b_1)$$

によって定義される $f^{x_2} : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ を f の x_2 切片と言う.

定理 4.1.3 (Fubini の定理 I). $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の連続関数とする.

(1) $\int_{a_2}^{b_2} f_{x_1}(x_2) dx_2 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ は $[a_1, b_1]$ で連続である.

(2) $\int_{a_1}^{b_1} f^{x_2}(x_1) dx_1 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ は $[a_2, b_2]$ で連続である.

証明. 省略. □

定理 4.1.4 (Fubini の定理 II). $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の連続関数とする.

(1) (累次積分)

$$\iint_I f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$

が成り立つ.

(2) (累次積分)

$$\iint_I f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$$

が成り立つ.

証明. 省略. □

例. $\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{(x+y+1)^2} dx dy = 2 \log 2 - \log 3.$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

4.2 一般の集合での多重積分

• 多重積分

定義 4.2.1. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^2 \setminus A) \end{cases}$$

によって定義される $\chi_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ を A の**特性関数**または**定義関数**と言う.

命題 4.2.1 (多重積分の well-definedness). $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界集合, $I \subseteq \mathbb{R}^2$ を $A \subseteq I$ を満たす $\mathbb{R}^2$ の有界閉区間, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の有界関数とすると, $f\chi_A$ が I で可積分ならば, $A \subseteq J$ を満たす $\mathbb{R}^2$ の任意の有界閉区間 $J \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して $f\chi_A$ は J で可積分であり,

$$\iint_J f(x)\chi_A(x)dx = \iint_I f(x)\chi_A(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.2.2. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界集合, $I \subseteq \mathbb{R}^2$ を $A \subseteq I$ を満たす $\mathbb{R}^2$ の有界閉区間, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の有界関数とする. f が A で**可積分**であるとは, $f\chi_A$ が I で可積分であることを言う. このとき,

$$\iint_I f(x)\chi_A(x)dx = \iint_A f(x)dx \left(= \iint_A f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \right)$$

と書き, $\iint_A f(x)dx$ を f の A での**積分**と言う.

注意. 一般の集合での多重積分に対しても, 命題 4.1.3–命題 4.1.6 と同様の命題が成り立つ.

● 面積

定義 4.2.3. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とする.

(1) A が**面積確定**であるとは, 1 が A で可積分であることを言う. このとき,

$$a(A) = \iint_A 1 dx$$

を A の**面積**と言う.

(2) A が**面積零**であるとは, A が面積確定であり, $a(A) = 0$ であることを言う.

定理 4.2.1. 面積は**有限加法的**である. つまり, 次の (i), (ii) を満たす.

(i) $a(\emptyset) = 0$.

(ii) $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とすると, A, B が面積確定ならば, $A \cup B, A \cap B$ は面積確定であり,

$$a(A \cup B) + a(A \cap B) = a(A) + a(B)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (有界閉区間塊). $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界集合, $K \subseteq \mathbb{R}^2$ を $A \subseteq K$ を満たす $\mathbb{R}^2$ の有界閉区間, $\Delta \in \mathcal{D}(K)$ とする.

(1) $I = \bigcup_{(k_1, k_2) \in \underline{K}} I_{(k_1, k_2)}$, $\underline{K} = \{(k_1, k_2) ; I_{(k_1, k_2)} \subseteq A\}$ とおくと, I は面積確定であり,

$$a(I) = \underline{S}(\chi_A; \Delta)$$

が成り立つ.

(2) $J = \bigcup_{(k_1, k_2) \in \overline{K}} I_{(k_1, k_2)}$, $\overline{K} = \{(k_1, k_2) ; I_{(k_1, k_2)} \cap A \neq \emptyset\}$ とおくと, J は面積確定であり,

$$a(J) = \overline{S}(\chi_A; \Delta)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.2.2. 面積は**正則**である. つまり, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) A は面積確定である.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$I \subseteq A \subseteq J, \quad a(J \setminus I) < \varepsilon$$

を満たす $\mathbb{R}^2$ の有界閉区間塊 $I, J \subseteq \mathbb{R}^2$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (縦線閉領域). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の連続関数で, $\varphi \leq \psi$, つまり, $\forall x \in [a, b]$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ を満たすものとし,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

とおくと, A は面積確定である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.2.3. 面積は**完備**である. つまり, $N \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とすると, N が面積零ならば, N の任意の部分集合は面積零である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 連続関数の可積分性

定義 4.2.4. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の有界関数とする.

$$\omega(f; A) = \sup_{x, y \in A} |f(x) - f(y)|$$

を f の A での振幅と言う.

命題 4.2.2. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の有界関数とする. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく.

$$(1) \quad \omega(f; A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x).$$

(2) ($A = I$) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}(I)$ に対して

$$\bar{S}(f; \Delta) - \underline{S}(f; \Delta) = \sum_{(k_1, k_2) = (1, 1)}^{(n_1, n_2)} \omega(f; I_{(k_1, k_2)})(x_{1, k_1} - x_{1, k_1-1})(x_{2, k_2} - x_{2, k_2-1})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定理 4.2.4 (連続関数の可積分性). $K \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ のコンパクトな面積確定集合, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ を K 上の関数とすると, f が K で連続ならば, f は K で可積分である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 可積分関数と多重積分

命題 4.2.3 (積分の有限加法性). $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界な面積確定集合, $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \cup B$ 上の有界関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は $A \cup B$ で可積分である.

(ii) f は A, B で可積分である.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば, f は $A \cap B$ で可積分であり,

$$\iint_{A \cup B} f(x) dx + \iint_{A \cap B} f(x) dx = \iint_A f(x) dx + \iint_B f(x) dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 連続関数と多重積分

命題 4.2.4 (積分の強単調性). $K \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ のコンパクトな面積確定集合, $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ を K 上の連続関数とすると, $\forall x \in K, f(x) \leq g(x)$, かつ $\exists x_0 \in K, f(x_0) < g(x_0)$ ならば,

$$\iint_K f(x) dx < \iint_K g(x) dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

命題 4.2.5. $K \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ のコンパクトな面積確定集合, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ を K 上の連続関数とすると, f が

$$\iint_K |f(x)| dx = 0$$

を満たせば, $f = 0$ である.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

● 累次積分

定義 4.2.5. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする.

(1) $x_1 \in \mathbb{R}$ とする. $A_{x_1} = \{x_2 \in \mathbb{R} ; (x_1, x_2) \in A\}$ を A の x_1 切片と言う.

(2) $x_2 \in \mathbb{R}$ とする. $A^{x_2} = \{x_1 \in \mathbb{R} ; (x_1, x_2) \in A\}$ を A の x_2 切片と言う.

定義 4.2.6. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする.

(1) $I = \{x_1 \in \mathbb{R} ; A_{x_1} \neq \emptyset\}$ とおき, $x_1 \in I$ とする.

$$f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2) \quad (x_2 \in A_{x_1})$$

によって定義される $f_{x_1} : A_{x_1} \rightarrow \mathbb{R}$ を f の x_1 切片と言う.

(2) $J = \{x_2 \in \mathbb{R} ; A^{x_2} \neq \emptyset\}$ とおき, $x_2 \in J$ とする.

$$f^{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2) \quad (x_1 \in A^{x_2})$$

によって定義される $f^{x_2} : A^{x_2} \rightarrow \mathbb{R}$ を f の x_2 切片と言う.

定理 4.2.5 (Fubini の定理 I). $K \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ のコンパクトな面積確定集合, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ を K 上の連続関数とする.

(1) $I = \{x_1 \in \mathbb{R} ; K_{x_1} \neq \emptyset\}$ とおくと, $\int_{K_*} f_*(x_2) dx_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ は I で連続である.

(2) $J = \{x_2 \in \mathbb{R} ; K^{x_2} \neq \emptyset\}$ とおくと, $\int_{K^*} f^*(x_1) dx_1 : J \rightarrow \mathbb{R}$ は J で連続である.

証明. 省略. □

定理 4.2.6 (Fubini の定理 II). $K \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ のコンパクトな面積確定集合, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ を K 上の連続関数とする.

(1) (累次積分) $I = \{x_1 \in \mathbb{R} ; K_{x_1} \neq \emptyset\}$ とおくと,

$$\iint_K f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_I \left(\int_{K_{x_1}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$

が成り立つ.

(2) (累次積分) $J = \{x_2 \in \mathbb{R} ; K^{x_2} \neq \emptyset\}$ とおくと,

$$\iint_K f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_J \left(\int_{K^{x_2}} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$$

が成り立つ.

証明. 省略. □

例 (縦線閉領域). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の連続関数で, $\varphi \leq \psi$, つまり, $\forall x \in [a, b]$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ を満たすものとし,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

とおくと, A は面積確定であり,

$$a(A) = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

4.3 変数変換公式

• アフィン写像と多重積分

定義 4.3.1. $A \in M_2(\mathbb{R})$ とする. A が**正則**であるとは, A が $\det A \neq 0$ を満たすことを言う. また, 2 次正則行列全体の集合を

$$GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) ; \det A \neq 0\}$$

と書く.

定義 4.3.2. $a \in \mathbb{R}$ とする.

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_1(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, E_{12}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_{21}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

によって定義される E_{12} , $E_1(a)$ ($a \neq 0$), $E_2(a)$ ($a \neq 0$), $E_{12}(a)$, $E_{21}(a)$ を **2 次基本行列**と言う.

定理 4.3.1. $A \in M_2(\mathbb{R})$ とするとき, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $A \in GL_2(\mathbb{R})$.

(ii) A は有限個の 2 次基本行列の積である.

証明. 省略. □

定理 4.3.2 (線型変換). $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $A \in GL_2(\mathbb{R})$ とし, $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$A(u) = Au \quad (u \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義する. $A(I) = \{Au ; u \in I\}$ とおき, $f: A(I) \rightarrow \mathbb{R}$ を $A(I)$ 上の連続関数とすると,

$$\iint_{A(I)} f(x) dx = |\det A| \iint_I f \circ A(u) du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.3.3 (平行移動). $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $b \in \mathbb{R}^2$ とし, $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$T(u) = u + b \quad (u \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義する. $T(I) = \{u + b ; u \in I\}$ とおき, $f: T(I) \rightarrow \mathbb{R}$ を $T(I)$ 上の連続関数とすると,

$$\iint_{T(I)} f(x) dx = \iint_I f \circ T(u) du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 微分同相写像と多重積分

定義 4.3.3. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の C^1 級写像とする. φ が微分同相であるとは, φ が次の (i), (ii) を満たすことを言う.

(i) φ は U から $\mathbb{R}^2$ への単射である.

(ii) $\forall u \in U, \det J_\varphi(u) \neq 0$.

定理 4.3.4 (C^1 級変数変換公式). $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $K \subseteq U$ を $\mathbb{R}^2$ のコンパクトな面積確定集合, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の C^1 級微分同相写像とする. $\varphi(K) = \{\varphi(u) ; u \in K\}$ とおき, $f : \varphi(K) \rightarrow \mathbb{R}$ を $\varphi(K)$ 上の連続関数とすると,

$$\iint_{\varphi(K)} f(x) dx = \iint_K f \circ \varphi(u) |\det J_\varphi(u)| du$$

が成り立つ.

証明. 省略. □

例 (極座標変換). $K \subseteq [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ を $\mathbb{R}^2$ (極座標) のコンパクトな面積確定集合とし, $[0, \infty) \times [0, 2\pi]$ 上の関数 $\varphi : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

によって定義する. $\varphi(K) = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) ; (r, \theta) \in K\}$ とおき, $f : \varphi(K) \rightarrow \mathbb{R}$ を $\varphi(K)$ (直交座標) 上の連続関数とすると,

$$\iint_{\varphi(K)} f(x, y) dx dy = \iint_K f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (極閉領域). $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi, \alpha < \beta, \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \infty)$ を $[\alpha, \beta]$ 上の非負値連続関数とし,

$$A = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] ; \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq \varphi(\theta)\}$$

とおくと, A は面積確定であり,

$$a(A) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\theta)^2 d\theta$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

4.4 広義多重積分

• コンパクト近似列

定義 4.4.1. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする. A の部分集合で $\mathbb{R}^2$ のコンパクトな面積確定集合全体の集合を

$$\mathcal{K}(A) = \{K \subseteq \mathbb{R}^2; K \text{ はコンパクト, 面積確定, } K \subseteq A\}$$

と書く.

命題 4.4.1. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とすると,

$$\bigcup_{K \in \mathcal{K}(A)} K = A$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.4.2. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする. 次の (i), (ii) を満たす $\mathcal{K}(A)$ の集合列 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を A のコンパクト近似列と言う.

(i) $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は単調増加である.

(ii) 任意の $K \in \mathcal{K}(A)$ に対し, $K \subseteq K_n$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する.

命題 4.4.2. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とするとき, A のコンパクト近似列 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在すれば,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = A$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とするとき, A のコンパクト近似列が存在するとは限らない.

● 非負値関数の広義多重積分

命題 4.4.3 (広義多重積分の well-definedness). $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を A のコンパクト近似列とし, A 上の非負値関数 $f: A \rightarrow [0, \infty)$ が次の (i), (ii) を満たすとする.

(i) 任意の $K \in \mathcal{K}(A)$ に対して f は K で可積分である.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_n} f(x) dx$ は収束する.

このとき, A の任意のコンパクト近似列 $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{L_n} f(x) dx$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{L_n} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_n} f(x) dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.4.3. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を A のコンパクト近似列, $f: A \rightarrow [0, \infty)$ を A 上の非負値関数とする. f が A で**広義可積分**であるとは, f が命題 4.4.3(i), (ii) を満たすことを言う. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_n} f(x) dx = \iint_A f(x) dx \left(= \iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right)$$

と書き, $\iint_A f(x) dx$ を f の A での**広義積分**と言う.

注意. 非負値関数の広義多重積分に対しても, 多重積分の基本性質が成り立つ.

例 (Gauss 積分). $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ とすると, $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ ($x, y > 0$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.4.1. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $f: A \rightarrow [0, \infty)$ を A 上の非負値関数とすると, f が A で広義可積分であるための必要十分条件は, f が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 任意の $K \in \mathcal{K}(A)$ に対して f は K で可積分である.

(ii) $\left\{ \iint_K f(x) dx ; K \in \mathcal{K}(A) \right\}$ は上に有界である.

さらに, f が (i), (ii) を満たせば,

$$\sup_{K \in \mathcal{K}(A)} \iint_K f(x) dx = \iint_A f(x) dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 一般の関数の広義多重積分

命題 4.4.4. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とし, A 上の関数 $f^\pm: A \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)), \quad f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) \quad (x \in A)$$

によって定義する.

- (1) $f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad (x \in A).$
- (2) $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \quad (x \in A).$
- (3) $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\} \quad (x \in A).$
- (4) $f^+(x) \geq 0, \quad f^-(x) \geq 0 \quad (x \in A).$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.4.4. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする. f が A で**広義可積分**であるとは, $f^\pm: A \rightarrow [0, \infty)$ が A で広義可積分であることを言う. このとき,

$$\iint_A f^+(x) dx - \iint_A f^-(x) dx = \iint_A f(x) dx \quad \left(= \iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right)$$

と書き, $\iint_A f(x) dx$ を f の A での**広義積分**と言う.

注意. 一般の関数の広義多重積分に対しても, 多重積分の基本性質が成り立つ.

命題 4.4.5 (広義積分の三角不等式). $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とすると, f が A で広義可積分ならば, $|f|$ は A で広義可積分であり,

$$\left| \iint_A f(x) dx \right| \leq \iint_A |f(x)| dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.4.2. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を A のコンパクト近似列, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とすると, f が A で広義可積分であるための必要十分条件は, f が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 任意の $K \in \mathcal{K}(A)$ に対して $f^\pm$ は K で可積分である.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_n} f(x) dx$ は**絶対収束**する. つまり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_n} |f(x)| dx$ は収束する.

さらに, f が (i), (ii) を満たせば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_n} f(x) dx = \iint_A f(x) dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 面積

定義 4.4.5. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の非有界集合, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ のコンパクト近似列とする.

(1) A が**面積確定**であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A \cap K_n$ が面積確定であることを言う. このとき,

$$a(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(A \cap K_n)$$

を A の**面積**と言う.

(2) A が**面積零**であるとは, A が面積確定であり, $a(A) = 0$ であることを言う.

注意. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の非有界な面積確定集合とすると, A の面積は

$$a(A) \in [0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

として存在する.

例. $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$K_n = \overline{B_n(0)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義すると, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト近似列である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

第5章 ベクトル場の微積分法

5.1 ベクトル場とその微分

● ベクトルの内積・外積

定義 5.1.1. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする. $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上のスカラー場と言う.

例 (重力ポテンシャル). $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ とする.

$$\varphi(x, y) = \log \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (a, b))$$

によって定義される $\varphi: \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$ 上のスカラー場である.

定義 5.1.2. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする. $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を A 上のベクトル場または2次ベクトル場と言う.

例 (重力). $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ とする.

$$f(x, y) = -\frac{(x-a, y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (a, b))$$

によって定義される $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$ 上のベクトル場である.

定義 5.1.3. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^2$ に対し,

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^2 x_i y_i$$

を x と y の内積またはスカラー積と言う.

命題 5.1.1. 2次ベクトルの内積は $\mathbb{R}^2$ 上の対称形式である. つまり, 次の (i)–(iv) を満たす.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^2, (x \cdot x \geq 0) \wedge (x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

(ii) $x \cdot y = y \cdot x \ (x, y \in \mathbb{R}^2)$.

(iii) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \ (x, y, z \in \mathbb{R}^2)$.

(iv) $(ax) \cdot y = a(x \cdot y) \ (a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2)$.

証明. 省略 (命題 1.1.2). □

命題 5.1.2. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に対し,

$$x \cdot y = |x||y| \cos \theta$$

を満たす $0 \leq \theta \leq \pi$ が一意に存在する.

証明. 省略 (命題 1.1.6).

□

定義 5.1.4. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^2$ に対し,

$$x \times y = \det(x \ y)$$

を x と y の**外積**または**ベクトル積**と言う.

命題 5.1.3. 2 次ベクトルの外積は $\mathbb{R}^2$ 上の**交代形式**である. つまり, 次の (i)–(iv) を満たす.

(i) $x \times x = 0$ ($x \in \mathbb{R}^2$).

(ii) $x \times y = -y \times x$ ($x \in \mathbb{R}^2$).

(iii) $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$ ($x, y, z \in \mathbb{R}^2$).

(iv) $(ax) \times y = a(x \times y)$ ($a \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^2$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 5.1.4. 任意の $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に対し,

$$|x \times y| = |x||y| \sin \theta$$

を満たす $0 \leq \theta < \pi$ が一意に存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 基底の向き

定義 5.1.5. $\{x_1, x_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の基底とする.

(1) $\{x_1, x_2\}$ が**正の向き**であるとは, $\{x_1, x_2\}$ が

$$\det(x_1 \ x_2) > 0$$

を満たすことを言う.

(2) $\{x_1, x_2\}$ が**負の向き**であるとは, $\{x_1, x_2\}$ が

$$\det(x_1 \ x_2) < 0$$

を満たすことを言う.

命題 5.1.5. $\mathbb{R}^2$ の標準基底は正の向きである.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.1.6. $\{x_1, x_2\}, \{\xi_1, \xi_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の基底とする.

(1) $\{x_1, x_2\}$ が $\{\xi_1, \xi_2\}$ と**同じ向き**であるとは,

$$(x_1 \ x_2) = P(\xi_1 \ \xi_2), \quad \det P > 0$$

を満たす $P \in M_2(\mathbb{R})$ が存在することを言う.

(2) $\{x_1, x_2\}$ が $\{\xi_1, \xi_2\}$ と**逆の向き**であるとは,

$$(x_1 \ x_2) = P(\xi_1 \ \xi_2), \quad \det P < 0$$

を満たす $P \in M_2(\mathbb{R})$ が存在することを言う.

命題 5.1.6. $\{x_1, x_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の基底とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\{x_1, x_2\}$ は正の向きである.

(ii) $\{x_1, x_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の標準基底と同じ向きである.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● ベクトル場の微分

定義 5.1.7. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の全微分可能スカラー場とする.

$$\text{grad}\varphi(x) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x) \right) \quad (x \in U)$$

によって定義される $\text{grad}\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を φ の**勾配** (gradient) と言う.

例 (重力ポテンシャル). $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ とする.

$$\varphi(x, y) = \log \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (a, b))$$

によって定義される $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$ 上のスカラー場であり,

$$\text{grad}\varphi(x, y) = -\frac{(x-a, y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (a, b))$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.1.8. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の全微分可能ベクトル場とする.

$$\text{rot}f(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \quad (x \in U)$$

によって定義される $\text{rot}f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を f の**回転** (rotation) と言う.

例 (円運動). $\omega > 0$ とする.

$$f(x, y) = (-\omega y, \omega x) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義される $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場であり,

$$\text{rot}f(x, y) = 2\omega \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.1.9. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の全微分可能ベクトル場とする.

$$\text{div}f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \quad (x \in U)$$

によって定義される $\text{div}f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を f の**発散** (divergence) と言う.

例 (重力). $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ とする.

$$f(x, y) = -\frac{(x-a, y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (a, b))$$

によって定義される $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$ 上のベクトル場であり,

$$\text{div}f(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (a, b))$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

定義 5.1.10.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

を **Laplace 作用素** と言う.

命題 5.1.7. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の C^2 級スカラー場とする.

$$(1) \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)(x) = 0 \quad (x \in U).$$

$$(2) \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)(x) = \Delta\varphi(x) \quad (x \in U).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

例 (重力ポテンシャル). $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ とする.

$$\varphi(x, y) = \log \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (a, b))$$

によって定義される $\varphi: \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$ 上のスカラー場であり,

$$-\Delta\varphi(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (a, b))$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

5.2 線積分とその基本性質

• C^1 級パラメータ曲線

定義 5.2.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $[a, b]$ 上の C^1 級関数とする.

(1) $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線と言う.

(2) $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ を x の跡と言う.

定義 5.2.2. $k \in \{0, 1\}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$, $x_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とする. x_0 が x_1 に向きを込めて C^1 級同値であるとは, 次の (i), (ii) を満たす $[a_0, b_0]$ 上の C^1 級関数 $\varphi : [a_0, b_0] \rightarrow [a_1, b_1]$ が存在することを言う.

(i) $\varphi(a_0) = a_1$, $\varphi(b_0) = b_1$, $\varphi'(t) > 0$ ($a_0 \leq t \leq b_0$).

(ii) $x_0(t) = (x_1 \circ \varphi)(t)$ ($a_0 \leq t \leq b_0$).

このとき, $x_0 \sim x_1$ と書く.

命題 5.2.1. $\sim$ は $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線の同値関係である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) (反射律) $x \sim x$.

(ii) (対称律) $x_0 \sim x_1 \Rightarrow x_1 \sim x_0$.

(iii) (推移律) $x_0 \sim x_1, x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_0 \sim x_2$.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定義 5.2.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とする.

(1) $[x] = \{\xi ; x \sim \xi\}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級曲線と言う.

(2) $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ を $[x]$ の跡と言う.

• C^1 級パラメータ曲線の長さ

命題 5.2.2 (曲線の長さの well-definedness). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とすると, 任意の $\xi \in [a, b]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $\xi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して

$$\int_a^b |x'(t)| dt = \int_c^d |\xi'(u)| du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 II). □

定義 5.2.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく.

$$l(C) = \int_a^b |x'(t)| dt$$

を C の長さと言う.

注意 (命題 5.2.2). $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級曲線の長さは, パラメータの選択に依存しない.

● 逆向き曲線, 閉曲線

定義 5.2.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とする.

(1)

$$\hat{x}(t) = x(-t) \quad (-b \leq t \leq -a)$$

によって定義される $\hat{x} : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を x の**逆向きパラメータ曲線**と言い, $[\hat{x}]$ を $[x]$ の**逆向き曲線**と言う.

(2) $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおくとき, $-C = \{\hat{x}(t) ; -b \leq t \leq -a\}$ を $[\hat{x}]$ の**跡**と言う.

定義 5.2.6. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とする.

(1) $x(a) = x(b)$ のとき, $[x]$ を $\mathbb{R}^2$ 上の**向き付けられた C^1 級閉曲線**と言う.

(2) $x(a) = x(b)$, かつ $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ が $[a, b]$ から $\mathbb{R}^2$ への単射のとき, $[x]$ を $\mathbb{R}^2$ 上の**向き付けられた C^1 級単純閉曲線**と言う.

● チェイン, サイクル

定義 5.2.7. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $C_1, \dots, C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級曲線の跡とする. 形式的な和

$$C_1 + \dots + C_n$$

を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級チェインの跡と言う. また, 二つのチェインが等しいとは, 次の (i)–(iii) を有限回施すことによって一方から他方へ移ることを言う.

(i) 曲線の順序を入れ換える.

(ii) 1 曲線を 2 曲線に分割する. 逆に, 一方の終点と他方の始点が一致する 2 曲線を 1 曲線に結合する.

(iii) 向きが互いに逆の 2 曲線を付け加える. 逆に, 向きが互いに逆の 2 曲線を取り除く.

定義 5.2.8. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $C_1, \dots, C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級閉曲線の跡とする. 形式的な和

$$C_1 + \dots + C_n$$

を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級サイクルの跡と言う.

● 線積分 I

命題 5.2.3 (線積分の well-definedness). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ を C 上の連続スカラー場とすると, 任意の $\xi \in [a, b]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $\xi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して

$$\int_a^b f(x(t))|x'(t)|dt = \int_c^d f(\xi(u))|\xi'(u)|du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.2.9. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ を C 上の連続スカラー場とすると,

$$\int_C f(x)d\sigma = \int_a^b f(x(t))|x'(t)|dt$$

を f の C での線積分と言う.

注意 (命題 5.2.3). $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級曲線での線積分は, パラメータの選択に依存しない.

例. $r > 0$ とし, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2\}$ とおくと,

$$\int_C x^2 d\sigma = \pi r^3$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.2.10. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $C = C_1 + \cdots + C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級チェイン, $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ を C 上の連続スカラー場とする.

$$\int_C f(x)d\sigma = \int_{C_1} f(x)d\sigma + \cdots + \int_{C_n} f(x)d\sigma$$

を f の C での線積分と言う.

注意 (命題 5.2.3). $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級チェインでの線積分は, パラメータの選択に依存しない.

● 線積分 II

命題 5.2.4 (線積分の well-definedness). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場とすると, 任意の $\xi \in [a, b]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $\xi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して

$$\int_a^b f(x(t)) \cdot x'(t) dt = \int_c^d f(\xi(u)) \cdot \xi'(u) du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.2.11. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場とすると,

$$\int_C f(x) \cdot dx \left(= \int_C f(x_1, x_2) \cdot (dx_1, dx_2) \right) = \int_a^b f(x(t)) \cdot x'(t) dt$$

を f の C での線積分と言う.

注意 (命題 5.2.4). $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級曲線での線積分は, パラメータの選択に依存しない.

例. $r > 0$ とし, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2\}$ とおくと,

$$\int_C (-y, x) \cdot (dx, dy) = 2\pi r^2$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.2.12. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $C = C_1 + \cdots + C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級チェイン, $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場とする.

$$\int_C f(x) \cdot dx = \int_{C_1} f(x) \cdot dx + \cdots + \int_{C_n} f(x) \cdot dx$$

を f の C での線積分と言う.

注意 (命題 5.2.4). $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級チェインでの線積分は, パラメータの選択に依存しない.

● 線積分 III

命題 5.2.5 (線積分の well-definedness). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ を C 上の連続スカラー場とすると, 任意の $\xi \in [a, b]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $\xi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して

$$\int_a^b f(x(t))x'_i(t)dt = \int_c^d f(\xi(u))\xi'_i(u)du \quad (i \in \{1, 2\})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.2.13. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ を C 上の連続スカラー場とすると,

$$\int_C f(x)dx_i = \int_a^b f(x(t))x'_i(t)dt \quad (i \in \{1, 2\})$$

を f の C での線積分と言う.

注意 (命題 5.2.5). $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級曲線での線積分は, パラメータの選択に依存しない.

例. $r > 0$ とし, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2\}$ とおくと,

$$\int_C (-y)dx = \pi r^2, \quad \int_C xdy = \pi r^2$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.2.14. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $C = C_1 + \cdots + C_n \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級チェイン, $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ を C 上の連続スカラー場とする.

$$\int_C f(x)dx_i = \int_{C_1} f(x)dx_i + \cdots + \int_{C_n} f(x)dx_i \quad (i \in \{1, 2\})$$

を f の C での線積分と言う.

注意 (命題 5.2.5). $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級チェインでの線積分は, パラメータの選択に依存しない.

● 線積分の基本性質

命題 5.2.6. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく.

(1) $f, g : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場とすると,

$$\int_C (f(x) + g(x)) \cdot dx = \int_C f(x) \cdot dx + \int_C g(x) \cdot dx$$

が成り立つ.

(2) $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場, $c \in \mathbb{R}$ とすると,

$$\int_C (cf(x)) \cdot dx = c \int_C f(x) \cdot dx$$

が成り立つ.

(3) $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場とすると,

$$\int_{-C} f(x) \cdot dx = - \int_C f(x) \cdot dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 5.2.7. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく.

(1) (線積分の三角不等式) $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場とすると,

$$\left| \int_C f(x) \cdot dx \right| \leq \int_C |f(x)| d\sigma$$

が成り立つ.

(2) $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場とすると,

$$\int_C f(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^2 \int_C f_i(x) dx_i$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

5.3 Green の定理, Gauss の定理

• 区分的 C^1 級領域

定義 5.3.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく.

(1)

$$\tau(x(t)) = \frac{x'(t)}{|x'(t)|} \quad (a \leq t \leq b)$$

によって定義される $\tau : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C の単位接線と言う.

(2) $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\nu(x(t)) = -J\tau(x(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

によって定義される $\nu : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C の正の向きの単位法線と言う.

命題 5.3.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく.

(1) $\nu(x(t)) \cdot \tau(x(t)) = 0 \quad (a \leq t \leq b)$.

(2) $\det(\nu(x(t)), \tau(x(t))) = 1 \quad (a \leq t \leq b)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.3.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の C^1 級関数で, $\varphi \leq \psi$ を満たすものとし, $C_1 = \{(x_1, \varphi(x_1)) ; a \leq x_1 \leq b\}$, $C_2 = \{(b, x_2) ; \varphi(b) \leq x_2 \leq \psi(b)\}$, $C_3 = \{(x_1, \psi(x_1)) ; a \leq x_1 \leq b\}$, $C_4 = \{(a, x_2) ; \varphi(a) \leq x_2 \leq \psi(a)\}$ とおく.

(1) $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; a < x_1 < b, \varphi(x_1) < x_2 < \psi(x_1)\}$ を $\mathbb{R}^2$ の区分的 C^1 級縦線領域と言う.

(2) $\partial D = C_1 + C_2 - C_3 - C_4$ を D の正の向きの境界と言う.

(3) $\overline{D} (= D \cup \partial D)$ を $\mathbb{R}^2$ の区分的 C^1 級縦線閉領域と言う.

定義 5.3.3. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界領域とする.

(1) D が区分的 C^1 級であるとは, ∂D が $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた区分的 C^1 級チェーンであることを言う.

(2) ∂D が正の向きであるとは, $\nu : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^2$ を ∂D の外向きの単位法線, $\tau : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^2$ を ∂D の単位接線とすると, $\{\nu, \tau\}$ が $\mathbb{R}^2$ の正の向きの (正規直交) 基底となることを言う.

命題 5.3.2. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の区分的 C^1 級有界領域とすると, 次の (i), (ii) を満たす有限個の $\mathbb{R}^2$ の区分的 C^1 級縦線領域 $D_1, \dots, D_n \subseteq \mathbb{R}^2$ が存在する.

(i) $\overline{D_1} \cup \dots \cup \overline{D_n} = \overline{D}$.

(ii) $\forall k, l \in \{1, \dots, n\}, (k \neq l \Rightarrow D_k \cap D_l = \emptyset)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● Green の定理

補題 5.3.1. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の区分的 C^1 級有界領域, $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\overline{D}$ 上の C^1 級スカラー場とする.

$$(1) \iint_D \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = - \int_{\partial D} f(x_1, x_2) dx_1.$$

$$(2) \iint_D \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial D} f(x_1, x_2) dx_2.$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.3.1 (Green の定理). $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の区分的 C^1 級有界領域, $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\overline{D}$ 上の C^1 級ベクトル場とすると,

$$\iint_D \operatorname{rot} f(x) dx = \int_{\partial D} f(x) \cdot dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.3.2. $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおき, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の区分的 C^1 級有界領域とすると,

$$a(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} Jx \cdot dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (楕円領域). $a, b > 0$ とし, $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1 \right\}$ とおくと,

$$a(D) = \pi ab$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● Gauss の定理

補題 5.3.2 (転置). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおき, $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場とすると,

$$\int_C Jf(x) \cdot dx = \int_C f \cdot \nu(x) d\sigma$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.3.3 (Gauss の定理). $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の区分的 C^1 級有界領域, $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\overline{D}$ 上の C^1 級ベクトル場とすると,

$$\iint_D \operatorname{div} f(x) dx = \int_{\partial D} f \cdot \nu(x) d\sigma$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.3.4 (Green の公式). $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の区分的 C^1 級有界領域, $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\overline{D}$ 上の C^1 級スカラー場, $g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\overline{D}$ 上の C^2 級スカラー場とすると,

$$\iint_D \operatorname{grad} f(x) \cdot \operatorname{grad} g(x) dx = \int_{\partial D} f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) d\sigma - \iint_D f(x) \Delta g(x) dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

5.4 スカラー・ポテンシャル

● スカラー・ポテンシャルの存在条件

定理 5.4.1. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の領域, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ を D 上の連続ベクトル場とすると, 次の (i)–(iii) は互いに同値である.

- (i) (スカラー・ポテンシャル) $\text{grad}\varphi = f$ を満たす D 上の C^1 級スカラー場 $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する.
- (ii) D 上のあるスカラー場 $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し, 任意の $\alpha, \beta \in D$ と, α と β を結ぶ D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級曲線 $C \subseteq D$ に対して

$$\int_C f(x) \cdot dx = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

が成り立つ.

- (iii) D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線 $C \subseteq D$ に対して

$$\int_C f(x) \cdot dx = 0$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 曲線のホモトピー

定義 5.4.1. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の領域, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $k \in \{0, 1\}$, $x_k : [a, b] \rightarrow D$ を D 上の向き付けられた区分的 C^1 級パラメータ曲線とし, $C_k = \{x_k(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $x_0(a) = x_1(a)$, $x_0(b) = x_1(b)$ のとき, C_0 が C_1 に D でホモトピー同値またはホモトープであるとは, 次の (i), (ii) を満たす $[0, 1] \times [a, b]$ 上の連続関数 $\varphi : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ が存在することを言う.

$$(i) \quad \varphi(s, a) = x_0(a) = x_1(a), \varphi(s, b) = x_0(b) = x_1(b) \quad (0 \leq s \leq 1).$$

$$(ii) \quad \varphi(0, t) = x_0(t), \varphi(1, t) = x_1(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

このとき, $C_0 \sim C_1 \pmod{D}$ と書く.

命題 5.4.1. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の領域とすると, $\sim$ は D 上の向き付けられた区分的 C^1 級曲線の同値関係である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

$$(i) \quad (\text{反射律}) \quad C \sim C \pmod{D}.$$

$$(ii) \quad (\text{対称律}) \quad C_0 \sim C_1 \pmod{D} \Rightarrow C_1 \sim C_0 \pmod{D}.$$

$$(iii) \quad (\text{推移律}) \quad C_0 \sim C_1, C_1 \sim C_2 \pmod{D} \Rightarrow C_0 \sim C_2 \pmod{D}.$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.4.2. $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の領域とする.

(1) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の領域, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow D$ を D 上の向き付けられた区分的 C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $x(a) = x(b)$ のとき, C が 0 に D でホモトピー同値またはホモトープであるとは, 次の (i), (ii) を満たす $[0, 1] \times [a, b]$ 上の連続関数 $\varphi : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow D$ が存在することを言う.

$$(i) \quad \varphi(s, a) = x(a) = x(b) = \varphi(s, b) \quad (0 \leq s \leq 1).$$

$$(ii) \quad \varphi(0, t) = x(t), \varphi(1, t) = x(a) = x(b) \quad (a \leq t \leq b).$$

このとき, $C \sim 0 \pmod{D}$ と書く.

(2) D が $\mathbb{R}^2$ のホモトープな単連結領域であるとは, D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線が 0 に D でホモトピー同値であることを言う.

● Poincaré の補題

定理 5.4.2 (Poincaré の補題). $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ のホモトープな単連結領域, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ を D 上の C^1 級ベクトル場とすると, 次の (i)–(iii) は互いに同値である.

(i) (スカラー・ポテンシャル) $\text{grad}\varphi = f$ を満たす D 上の C^2 級スカラー場 $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する.

(ii) $\text{rot} f = 0$.

(iii) D 上の任意の向き付けられた区分的 C^1 級閉曲線 $C \subseteq D$ に対して

$$\int_C f(x) \cdot dx = 0$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = (x, y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義すると, f のスカラー・ポテンシャルが存在し, その一つ $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = (-y, x) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義すると, f のスカラー・ポテンシャルは存在しない.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

関連図書

- [1] 齋藤 正彦, 微分積分学, 東京図書, 2006 年.
- [2] 杉浦 光夫, 解析入門 I(基礎数学), 東京大学出版会, 1980 年.
- [3] 杉浦 光夫, 解析入門 II(基礎数学), 東京大学出版会, 1985 年.