

# 微分積分学III 演習問題

柿澤 亮平

島根大学学術研究院 教育学系 数学科教育専攻

# 目次

|              |                          |           |
|--------------|--------------------------|-----------|
| <b>第 1 章</b> | <b>ベクトル空間</b>            | <b>1</b>  |
| 1.1          | ベクトル空間上の内積               | 1         |
| 1.2          | ベクトル空間上の位相               | 3         |
| 1.3          | 点列の極限                    | 7         |
| <b>第 2 章</b> | <b>多変数関数の微分法</b>         | <b>10</b> |
| 2.1          | 関数の極限                    | 10        |
| 2.2          | 連続関数, 一様連続関数, 半連続関数      | 11        |
| 2.3          | 全導関数と接平面                 | 14        |
| <b>第 3 章</b> | <b>Taylor の定理, 陰関数定理</b> | <b>19</b> |
| 3.1          | 高階偏導関数                   | 19        |
| 3.2          | Taylor の定理と関数の極大・極小      | 22        |
| 3.3          | 陰関数定理と関数の条件付き極値          | 24        |
| <b>第 4 章</b> | <b>多変数関数の積分法</b>         | <b>28</b> |
| 4.1          | 有界閉区間での多重積分              | 28        |
| 4.2          | 一般の集合での多重積分              | 30        |
| 4.3          | 変数変換公式                   | 34        |
| 4.4          | 広義多重積分                   | 36        |
| <b>第 5 章</b> | <b>ベクトル場の微積分法</b>        | <b>40</b> |
| 5.1          | ベクトル場とその微分               | 40        |
| 5.2          | 線積分とその基本性質               | 41        |
| 5.3          | Green の定理, Gauss の定理     | 45        |
| 5.4          | スカラー・ポテンシャル              | 50        |

# 第1章 ベクトル空間

## 1.1 ベクトル空間上の内積

### ● ベクトル空間

1 2次ベクトルの乗法を

$$xy = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義すると,  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  は2次ベクトルの乗法について可換群である. つまり, 次の (i)–(iv) を満たすことを証明せよ.

(i)  $(xy)z = x(yz) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}^2).$

(ii)  $\exists! 1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}^2, x1 = x = 1x.$

(iii)  $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \exists! x^{-1} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, xx^{-1} = 1 = x^{-1}x.$

(iv)  $xy = yx \quad (x, y \in \mathbb{R}^2).$

2 2次ベクトルの大小相等を

$$x \leq y \Leftrightarrow (x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2) \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義すると,  $\mathbb{R}^2$  は2次ベクトルの大小相等について順序集合である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ.

(i)  $\forall x \in \mathbb{R}^2, x \leq x.$

(ii)  $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, ((x \leq y) \wedge (x \geq y) \Rightarrow x = y).$

(iii)  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2, ((x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z).$

3  $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} ; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$  とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1)  $\mathcal{C}$  は2次正方行列の加法・スカラー乗法について線型空間である.

(2)  $\mathcal{C}$  上の関数  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f(X) = (x_1, x_2) \quad \left( X = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \right)$$

によって定義すると,  $f$  は  $\mathcal{C}$  から  $\mathbb{R}^2$  への線型空間の同型写像である.

## ● ベクトル空間上の内積・ノルム・距離

- 4 (指定演習問題 1)  $\{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の標準基底,  $(\mathbb{R}^2)^*$  を  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}$  への線型写像全体の集合とすると, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の  $f \in (\mathbb{R}^2)^*$  に対して  $b(f)$  を

$$b(f) = (f(e_1), f(e_2))$$

によって定義すると,

$$f(x) = \langle x, b(f) \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つ.

(2) 任意の  $f \in (\mathbb{R}^2)^*$  に対して  $\|f\|$  を

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{|x|} ; x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0 \right\}$$

によって定義すると,

$$\|f\| = |b(f)|$$

が成り立つ.

- 5 (中線定理) 次の等式

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2) \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つことを証明せよ.

- 6 次の不等式

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つことを証明せよ.

- 7 任意の  $x \in \mathbb{R}^2$  に対して  $|x|_1$  を

$$|x|_1 = |x_1| + |x_2|$$

によって定義すると,  $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_1)$  はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ.

(i)  $\forall x \in \mathbb{R}^2, (|x|_1 \geq 0) \wedge (|x|_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ .

(ii) (三角不等式)  $|x+y|_1 \leq |x|_1 + |y|_1 \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$ .

(iii)  $|ax|_1 = |a||x|_1 \quad (a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2)$ .

- 8 任意の  $x \in \mathbb{R}^2$  に対して  $|x|_\infty$  を

$$|x|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

によって定義すると,  $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_\infty)$  はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ.

(i)  $\forall x \in \mathbb{R}^2, (|x|_\infty \geq 0) \wedge (|x|_\infty = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ .

(ii) (三角不等式)  $|x+y|_\infty \leq |x|_\infty + |y|_\infty \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$ .

(iii)  $|ax|_\infty = |a||x|_\infty \quad (a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2)$ .

## 1.2 ベクトル空間上の位相

### • ベクトル空間の開集合・閉集合

- [1] 任意の  $x \in \mathbb{R}^2$  に対して  $|x|_1$  を

$$|x|_1 = |x_1| + |x_2|$$

によって定義する.  $a \in \mathbb{R}^2$ ,  $r > 0$  とするとき, 次の  $\mathbb{R}^2$  の部分集合

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |x - a|_1 < r\}$$

の概形を図示せよ.

- [2] 任意の  $x \in \mathbb{R}^2$  に対して  $|x|_\infty$  を

$$|x|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

によって定義する.  $a \in \mathbb{R}^2$ ,  $r > 0$  とするとき, 次の  $\mathbb{R}^2$  の部分集合

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |x - a|_\infty < r\}$$

の概形を図示せよ.

- [3]  $d \in \{1, 2\}$  とする. 任意の  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  に対して

$$A^i = \{x \in \mathbb{R}^d ; \exists r > 0, B_r(x) \subseteq A\}$$

とおくとき,  $*$  が次の (i)–(iv) を満たすことを証明せよ.

(i)  $(\mathbb{R}^d)^i = \mathbb{R}^d$ .

(ii)  $A^i \subseteq A$  ( $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ).

(iii)  $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$  ( $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ).

(iv)  $(A^i)^i = A^i$  ( $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ).

- [4] (Kuratowski の公理)  $d \in \{1, 2\}$  とする. 任意の  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  に対して

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^d ; \forall r > 0, B_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

とおくとき,  $\overline{\phantom{x}}$  が次の (i)–(iv) を満たすことを証明せよ.

(i)  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .

(ii)  $A \subseteq \overline{A}$  ( $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ).

(iii)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  ( $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ).

(iv)  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$  ( $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ).

- [5] 次の  $\mathbb{R}$  の部分集合  $A \subseteq \mathbb{R}$  が開, 閉, またはどちらでもないかを判定せよ.

(1)  $A = (a, b)$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ).

(2)  $A = (a, b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ).

[6] 次の  $\mathbb{R}$  の部分集合  $A \subseteq \mathbb{R}$  が開, 閉, またはどちらでもないかを判定せよ.

(1)  $A = (a, \infty)$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(2)  $A = (-\infty, b]$  ( $b \in \mathbb{R}$ ).

[7]  $d \in \{1, 2\}$  とする.

$$\mathcal{O} = \{U \subseteq \mathbb{R}^d ; U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U^i\}$$

とおくとき,  $\mathcal{O}$  が次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ. ただし,  $\#(*)$  は  $*$  の元の個数を表す.

(i)  $\emptyset \in \mathcal{O}, \mathbb{R}^d \in \mathcal{O}$ .

(ii)  $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \left( (\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}) \wedge (\#(\mathcal{U}) < \infty) \Rightarrow \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{O} \right)$ .

(iii)  $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \left( \mathcal{U} \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{O} \right)$ .

[8]  $d \in \{1, 2\}$  とする.

$$\mathcal{A} = \{F \subseteq \mathbb{R}^d ; F = \overline{F}\}$$

とおくとき,  $\mathcal{A}$  が次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ. ただし,  $\#(*)$  は  $*$  の元の個数を表す.

(i)  $\emptyset \in \mathcal{A}, \mathbb{R}^d \in \mathcal{A}$ .

(ii)  $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \left( (\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}) \wedge (\#(\mathcal{F}) < \infty) \Rightarrow \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathcal{A} \right)$ .

(iii)  $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \left( \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathcal{A} \right)$ .

[9]  $d \in \{1, 2\}$  とする. 任意の  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  に対して  $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{O} ; U \subseteq A\}$  とおくと,

$$A^i = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

が成り立つ. つまり,  $A^i$  は  $A$  に含まれる最大の  $\mathbb{R}^d$  の開集合であることを証明せよ.

[10]  $d \in \{1, 2\}$  とする. 任意の  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  に対して  $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{A} ; F \supseteq A\}$  とおくと,

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

が成り立つ. つまり,  $\overline{A}$  は  $A$  を含む最小の  $\mathbb{R}^d$  の閉集合であることを証明せよ.

[11] (第 1 分離公理)  $d \in \{1, 2\}$  とするとき, 任意の  $x, y \in \mathbb{R}^d$  に対し,

$$B_r(x) \cap \{y\} = \emptyset$$

を満たす  $r > 0$  が存在することを証明せよ.

[12] (第 4 分離公理)  $d \in \{1, 2\}$  とするとき,  $\mathbb{R}^d$  の任意の閉集合  $F, G \subseteq \mathbb{R}^d$  に対し,

$$F \subseteq U, \quad G \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset$$

を満たす  $\mathbb{R}^d$  の開集合  $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$  が存在することを証明せよ.

## ● ベクトル空間の連結集合・コンパクト集合

13  $d \in \{1, 2\}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  を  $\mathbb{R}^d$  の連結集合とすると,

$$A \subseteq B \subseteq \overline{A}$$

を満たす  $\mathbb{R}^d$  の任意の部分集合  $B \subseteq \mathbb{R}^d$  は連結であることを証明せよ.

14  $d \in \{1, 2\}$ ,  $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  を  $\mathbb{R}^d$  の連結集合族とすると,

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, (A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset)$$

ならば,  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  は連結であることを証明せよ.

**定義.**  $d \in \{1, 2\}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  を  $\mathbb{R}^d$  の部分集合とする.  $A$  が**弧状連結**であるとは, 任意の  $a, b \in A$  に対し, 次の (i), (ii) を満たす  $[0, 1]$  上の連続関数  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  が存在することを言う.

(i)  $f(0) = a, f(1) = b$ .

(ii)  $f([0, 1]) = \{f(t); 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$ .

15  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の部分集合,  $a \in A$  とするとき,  $A$  が  $a$  について**星型**ならば, つまり,

$$\forall b \in \mathbb{R}^2, (b \in A \Rightarrow \{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A)$$

ならば,  $A$  は弧状連結であることを証明せよ.

16  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の部分集合とすると,  $A$  が**凸**ならば, つまり,

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^2, (a, b \in A \Rightarrow \{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A)$$

ならば,  $A$  は任意の  $a \in A$  について星型であることを証明せよ.

17  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}$  の部分集合とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i)  $A$  は  $\mathbb{R}$  の**区間**である. つまり,  $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a, b \in A \Rightarrow \{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A)$ .

(ii)  $A$  は連結である.

18  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の部分集合とすると,  $A$  が弧状連結ならば,  $A$  は連結であることを証明せよ.

19

$$A = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) ; x > 0 \right\}$$

とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1)  $\overline{A} = A \cup \{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$ .

(2)  $\overline{A}$  は連結であるが, 弧状連結でない.

20  $d \in \{1, 2\}$  とするとき,  $\mathbb{R}^d$  の有限集合がコンパクトであることを証明せよ.

[21]  $d \in \{1, 2\}$ ,  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  を  $\mathbb{R}^d$  のコンパクト集合族とするととき,

$$\sharp(\mathcal{K}) < \infty$$

ならば,  $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$  はコンパクトであることを証明せよ. ただし,  $\sharp(*)$  は  $*$  の元の個数を表す.

[22]  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}$  の部分集合とするととき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

- (i)  $A$  は  $\mathbb{R}$  の有界閉区間である.
- (ii)  $A$  は連結かつコンパクトである.

## 1.3 点列の極限

### ● 点列の収束・発散

□1 (指定演習問題 2)  $d \in \{1, 2\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^d$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  を  $\mathbb{R}^d$  の部分集合とすると、次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ。

(i)  $a \in \overline{A}$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  となる  $A$  の点列  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が存在する。

□2  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$  とし、 $\mathbb{R}^2$  の点列  $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  を次の漸化式

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -ab & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき、次の問いに答えよ。

(1)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -ab & a+b \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$  とおくと、 $P^{-1}AP$  を求めよ。

(2)  $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  の一般項を求めよ。

(3)  $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  が収束するための  $a, b$  の必要十分条件を求め、その条件のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  の値を求めよ。

□3  $a \in \mathbb{R}$  とし、 $\mathbb{R}^2$  の点列  $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  を次の漸化式

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき、次の問いに答えよ。

(1)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$  とおくと、 $P^{-1}AP$  を求めよ。

(2)  $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  の一般項を求めよ。

(3)  $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  が収束するための  $a$  の必要十分条件を求め、その条件のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  の値を求めよ。

【補足】  $P^{-1}AP$  を  $A$  の標準化と言う。

## ● Bolzano-Weierstrass の定理

[4]  $d \in \{1, 2\}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  を  $\mathbb{R}^d$  の部分集合,  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を  $A$  の点列,  $\alpha \in \overline{A}$  とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ .

(ii)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  の任意の収束する部分列  $\{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  に対して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n(k)} = \alpha$$

となる.

[5]  $d \in \{1, 2\}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  を  $\mathbb{R}^d$  の部分集合とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i)  $A$  は点列コンパクトである. つまり,  $A$  の任意の点列  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対し,  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  の  $A$  に収束する部分列が存在する.

(ii)  $A$  はコンパクトである.

## ● Cauchy の定理

[6]  $\theta \in \mathbb{R}, \theta \neq 0$  とするとき,  $\left\{ \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  は収束しないことを証明せよ.

[7]  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を  $\mathbb{R}^2$  の点列とし, 数列  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を

$$s_n = \sum_{k=0}^n |a_{k+1} - a_k| \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1)  $m < n$  を満たす任意の  $m, n \in \mathbb{N}$  に対して

$$|a_n - a_m| \leq s_{n-1} - s_{m-1}$$

が成り立つ.

(2)  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $\mathbb{R}$  の Cauchy 列ならば,  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $\mathbb{R}^2$  の Cauchy 列である.

[8]  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を  $\mathbb{R}^2$  の点列で, ある  $0 < r < 1$  が存在し, 任意の  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r |a_n - a_{n-1}|$$

が成り立つものとするとき, 次のことを証明せよ.

(1)  $m < n$  を満たす任意の  $m, n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \frac{r^m - r^n}{1 - r} |a_1 - a_0|$$

が成り立つ.

(2)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $\mathbb{R}^2$  の Cauchy 列である.

## 第2章 多変数関数の微分法

### 2.1 関数の極限

#### ● スカラー値関数の極限

[1]  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の部分集合,  $(a, b) \in A$ ,  $f : A \setminus \{(a, b)\} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $A \setminus \{(a, b)\}$  上の関数,  $\alpha \in \mathbb{R}$  とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \alpha.$

(ii)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall (r, \theta) \in B, (0 < r < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) - \alpha| < \varepsilon).$

ただし,  $B = \{(r, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} ; (a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \in A\}.$

[2] 次の極限值を求めよ.

(1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}.$

(2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}.$

[3] 次の極限值を求めよ.

(1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$

(2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x(1 - y^n) - y(1 - x^n) - x^n + y^n}{(1 - x)(1 - y)(x - y)} \quad (n \in \mathbb{N}).$

## 2.2 連続関数, 一様連続関数, 半連続関数

### ● スカラー値連続関数

[1] 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f$  が  $(0, 0)$  で連続であるか否かを判定せよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

[2] 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f$  が  $(0, 0)$  で連続であるか否かを判定せよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

[3]  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の部分集合,  $(a, b) \in A$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  を  $A$  上の関数とすると, 次の (i)  $\Rightarrow$  (ii) を証明し, (i)  $\Leftarrow$  (ii) の反例を一つ挙げよ.

(i)  $f$  は  $(a, b)$  で連続である.

(ii)  $f(*, b)$  は  $a$  で連続であり,  $f(a, *)$  は  $b$  で連続である.

## ● ベクトル値連続関数

□4  $a \in \mathbb{R}^2$ ,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  上の関数とすると、次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i)  $f$  は  $a$  で連続である.

(ii)  $f(a) \in V$  を満たす  $\mathbb{R}^2$  の任意の開集合  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  に対して  $a \in U$  を満たす  $\mathbb{R}^2$  のある開集合  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  が存在し,

$$f(U) \subseteq V$$

が成り立つ.

□5 (Banach の不動点定理)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  上の関数で、ある  $0 < r < 1$  が存在し,

$$|f(x) - f(y)| \leq r|x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つものとするとき、次のことを証明せよ.

(1)  $x \in \mathbb{R}^2$  とし、 $\mathbb{R}^2$  の点列  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を次の漸化式

$$a_0 = x, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義すると、任意の  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}|$$

が成り立つ.

(2)  $f(\alpha) = \alpha$  を満たす  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  が一意に存在する.

【補足】  $f$  を  $\mathbb{R}^2$  上の縮小写像と言い、 $\alpha$  を  $f$  の不動点と言う.

## ● 最大値の定理

[6]  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の非有界閉集合,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  を  $A$  上の連続関数で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i)  $f(a, b) > 0$  を満たす  $(a, b) \in A$  が存在する.

(ii)  $\lim_{(x,y) \in A, |(x,y)| \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$ .

このとき,  $f$  の  $A$  での最大値が存在することを証明せよ.

[7]  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の非有界閉集合,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  を  $A$  上の連続関数で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i)  $f(a, b) < 0$  を満たす  $(a, b) \in A$  が存在する.

(ii)  $\lim_{(x,y) \in A, |(x,y)| \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$ .

このとき,  $f$  の  $A$  での最小値が存在することを証明せよ.

[8] 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数

$$f(x, y) = xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

の  $\mathbb{R}^2$  での最大値・最小値が存在することを証明し,  $f$  が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

[9]  $A = [0, \infty)^2$  とおくと, 次の  $A$  上の関数

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) e^{-(x+y)} \quad ((x, y) \in A)$$

の  $A$  での最大値・最小値が存在することを証明し,  $f$  が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

## 2.3 全導関数と接平面

### ● スカラー値関数の方向導関数・偏導関数

- 1  $e = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  とするとき, 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f$  が  $(0, 0)$  で  $e$  方向に微分可能であるか否かを判定し,  $e$  方向に微分可能ならば,  $\frac{\partial f}{\partial e}(0, 0)$  を求めよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

- 2  $e = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  とするとき, 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f$  が  $(0, 0)$  で  $e$  方向に微分可能であるか否かを判定し,  $e$  方向に微分可能ならば,  $\frac{\partial f}{\partial e}(0, 0)$  を求めよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

- 3 次の関数  $f(x, y)$  の偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  を求めよ.

$$(1) f(x, y) = \log(x^2 + 2xy - y^2).$$

$$(2) f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}.$$

- 4 次の関数  $f(x, y)$  の偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  を求めよ.

$$(1) f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy - y^2}.$$

$$(2) f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}.$$

## ● スカラー値関数の全導関数

□5 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f$  が  $(0, 0)$  で全微分可能であるか否かを判定せよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

□6 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f$  が  $(0, 0)$  で全微分可能であるか否かを判定せよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

## ● ベクトル値関数の全導関数

[7]  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}^2$  上の全微分可能関数とし,  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$g(u, v) = f(x, y), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1)  $g'(u, v) = {}^t A f'(x, y)$ .

(2)  $|f'(x, y)| = |g'(u, v)|$  であるための  $A$  の必要十分条件は,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \left( = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

を満たす  $\theta \in \mathbb{R}$  が存在することである.

[8] (Cauchy-Riemann 方程式)  $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $f: U \rightarrow V$ ,  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$  をそれぞれ  $U, V$  上の全微分可能関数とするとき,  $f$  が

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \quad (x \in U)$$

を満たせば,

$$|(g \circ f)'(x)| = |g'(f(x))| |f'_1(x)| \quad (x \in U),$$

$$|(g \circ f)'(x)| = |g'(f(x))| |f'_2(x)| \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

[9] (指定演習問題 3) (進行波)  $c > 0$ ,  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}^2$  上の  $C^1$  級関数とするとき,  $u$  が

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たせば,  $u$  は  $x - ct$  の関数である. つまり,

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たす  $\mathbb{R}$  上の  $C^1$  級関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が存在することを証明せよ.

[10] (後退波)  $c > 0$ ,  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}^2$  上の  $C^1$  級関数とするとき,  $u$  が

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たせば,  $u$  は  $x + ct$  の関数である. つまり,

$$u(x, t) = f(x + ct) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たす  $\mathbb{R}$  上の  $C^1$  級関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が存在することを証明せよ.

[11]  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}^2$  上の  $C^1$  級関数とすると、次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i)  $f(ax) = a^m f(x)$  ( $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ).

(ii)  $\langle x, f'(x) \rangle = mf(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^2$ ).

[12]  $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $f: U \rightarrow V$ ,  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^2$  をそれぞれ  $U, V$  上の全微分可能関数とするとき,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

## ● 接平面

13 次の  $U$  上の関数  $f$  のグラフ  $G(f)$  の  $(a, b, f(a, b)) \in G(f)$  での接平面  $T_{(a,b)}(f)$  の方程式を求めよ.

(1)  $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$ ,  $U = \mathbb{R}^2$ .

(2)  $f(x, y) = \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$ ,  $U = B_c(0, 0)$  ( $c > 0$ ).

14  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $a \in U$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の  $a$  で全微分可能な関数とするとき,  $f'(a) \neq 0$  ならば, 次の  $\partial B_1(0)$  上の関数

$$g(e) = \frac{\partial f}{\partial e}(a) \quad (e \in \partial B_1(0))$$

の  $\partial B_1(0)$  での最大値・最小値が存在することを証明し,  $g$  が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

## 第3章 Taylor の定理, 陰関数定理

### 3.1 高階偏導関数

#### ● 多重指数

[1]  $n \in \mathbb{N}$  とするとき, 次の等式を証明せよ. ただし,  $\sharp(*)$  は  $*$  の元の個数を表す.

$$(1) \sharp(\{\alpha \in \mathbb{N}^2 ; |\alpha| = n\}) = n + 1.$$

$$(2) \sharp(\{\alpha \in \mathbb{N}^2 ; |\alpha| < n\}) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

[2]  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  とするとき, 次の和を書き下せ.

$$(1) \sum_{|\alpha|=2} \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

$$(2) \sum_{|\alpha|<2} \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

[3] (二項定理) 任意の  $\alpha \in \mathbb{N}^2$  に対して

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つことを証明せよ.

[4] (Leibniz の法則)  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の  $C^n$  級関数とすると,  $|\alpha| = n$  を満たす任意の  $\alpha \in \mathbb{N}^2$  に対して

$$(fg)^{(\alpha)}(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} f^{(\alpha-\beta)}(x) g^{(\beta)}(x) \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

## ● $n$ 階偏導関数

[5]  $\alpha \in \mathbb{R}$  とするとき, 次の  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  上の関数

$$f(x) = |x|^\alpha \quad (x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

の 2 階偏導関数  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  ( $i, j \in \{1, 2\}$ ) を求めよ.

定義.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を Laplace 作用素と言う.

[6] 次の  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $U$  上の関数  $f$  が  $U$  で調和である. つまり,

$$\Delta f = 0$$

を満たすことを証明せよ.

$$(1) f(x, y) = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3, U = \mathbb{R}^2.$$

$$(2) f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}, U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

[7] 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は  $\mathbb{R}^2$  で  $C^1$  級であるが,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  であることを証明せよ.

[8] 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は  $\mathbb{R}^2$  で  $C^1$  級であるが,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  であることを証明せよ.

定義.

$$\Delta_S = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

を Laplace-Beltrami 作用素と言う.

[9]  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  上の  $C^2$  級関数とし,  $(0, \infty) \times \mathbb{R}$  上の関数  $g: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (r > 0, \theta \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき,

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \Delta_S g(r, \theta)$$

が成り立つことを証明せよ.

- 10 (Cauchy-Riemann 方程式)  $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $f: U \rightarrow V, g: V \rightarrow \mathbb{R}$  をそれぞれ  $U, V$  上の  $C^2$  級関数とすると,  $f$  が

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \quad (x \in U)$$

を満たせば,

$$\Delta(g \circ f)(x) = \Delta g(f(x)) |f'_1(x)|^2 \quad (x \in U),$$

$$\Delta(g \circ f)(x) = \Delta g(f(x)) |f'_2(x)|^2 \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

- 11 (波動方程式)  $c > 0, u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}^2$  上の  $C^2$  級関数とすると,  $u$  が

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たせば,  $u$  は  $x - ct$  の関数 (進行波) と  $x + ct$  の関数 (後退波) の和である. つまり,

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たす  $\mathbb{R}$  上の  $C^2$  級関数  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が存在することを証明せよ.

- 12 (Lorentz 変換)  $0 < v < c, \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}^2$  上の  $C^2$  級関数とすると,  $\varphi$  が

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たせば,

$$\psi(\xi, \tau) = \varphi(x, t), \quad \begin{pmatrix} \xi \\ c\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad ((\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義される  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  は

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}(\xi, \tau) = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}(\xi, \tau)$$

を満たすことを証明せよ.

- 13  $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}^2$  上の  $C^n$  級関数とすると,  $f$  が

$$f(ax) = a^m f(x) \quad (a > 0, x \in \mathbb{R}^2)$$

を満たせば,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_1^{n-k} x_2^k \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n-k} \partial x_2^k}(x) = m(m-1) \cdots (m-n+1) f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つことを証明せよ.

## 3.2 Taylor の定理と関数の極大・極小

### • 双線型形式, 2 次形式

[1]  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$  とするとき, 次のことを証明せよ.

(1)  $A$  の任意の固有値は実数である.

(2)  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  を  $A$  の固有値とし,

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2b}{a-c}$$

とおくと,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

[2]  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$  とし,  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $Q_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$Q_A(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義する. このとき,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  を  $A$  の固有値とし,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2b}{a-c}$$

とおくと,

$$Q_A(x, y) = \lambda u^2 + \mu v^2$$

が成り立つことを証明せよ.

[3]  $A \in S_2(\mathbb{R})$  とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i)  $A$  は正値である.

(ii)  $A$  の任意の固有値は正である.

[4]  $A \in S_2(\mathbb{R})$  とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i)  $A$  は負値である.

(ii)  $A$  の任意の固有値は負である.

## • Hesse 行列と関数の極大・極小

[5]  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}^2$  上の  $C^2$  級関数とし,  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$g(u, v) = f(x, y), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ. ただし,  $I$  は 2 次単位行列を表す.

(1)  $H_g(u, v) = {}^t A H_f(x, y) A$ .

(2) (Laplace 作用素の合同変換不変性)  $A^t A = I = {}^t A A$  ならば,  $\Delta f(x, y) = \Delta g(u, v)$ .

[6] 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数

$$f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + y^3 - 12x - 6y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が極大, 極小, 鞍となる点をそれぞれ求めよ.

[7] (指定演習問題 4)  $a > 0$  とするとき, 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - a^2) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が極大, 極小, 鞍となる点をそれぞれ求めよ.

[8]  $0 < a < b$  とするとき, 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数

$$f(x, y) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + y^2}^3 - \frac{1}{2}(a + b)(x^2 + y^2) + ab\sqrt{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が極大, 極小, 鞍となる点をそれぞれ求めよ.

[9] 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が極大, 極小, 鞍となる点をそれぞれ求めよ.

[10] 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数

$$f(x, y) = (xy + x + y - 1)e^{-(x+y)} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が極大, 極小, 鞍となる点をそれぞれ求めよ.

### 3.3 陰関数定理と関数の条件付き極値

#### ● 陰関数定理, 逆関数定理

1  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2y^3 + x - 2y + 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $f(x, \varphi(x)) = 0$  によって定義される 1 のある開近傍  $U \subseteq \mathbb{R}$  上の関数  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  が存在することを証明せよ.
- (2)  $\varphi(1), \varphi'(1)$  の値をそれぞれ求めよ.

2  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x, y) = 2x^3 - y^3 + x^2 - 4xy + y^2 + 4 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $f(x, \varphi(x)) = 0$  によって定義される 0 のある開近傍  $U \subseteq \mathbb{R}$  上の関数  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  が存在することを証明せよ.
- (2)  $\varphi(0), \varphi'(0)$  の値をそれぞれ求めよ.

3  $U, V \subseteq \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}$  の開集合,  $a \in U, b \in V, f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U \times V$  上の  $C^3$  級関数とすると,

$$f(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

ならば,  $f(x, \varphi(x)) = 0$  によって定義される  $a$  のある開近傍  $U' \subseteq U$  上の  $C^3$  級関数  $\varphi: U' \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $\varphi'(x)$  を  $f_x(x, \varphi(x)), f_y(x, \varphi(x))$  で表せ.
- (2)  $\varphi''(x)$  を  $f_x(x, \varphi(x)), f_y(x, \varphi(x)), f_{xx}(x, \varphi(x)), f_{xy}(x, \varphi(x)), f_{yy}(x, \varphi(x))$  で表せ.
- (3)  $\varphi$  を

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + o((x - a)^2) \quad (x \rightarrow a)$$

で近似せよ.

4  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x, y) = x^3 + 2y^3 - 6xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $f(x, \varphi(x)) = 0$  によって定義される 2 のある開近傍  $U \subseteq \mathbb{R}$  上の関数  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  が存在することを証明せよ.
- (2)  $\varphi$  が極大, 極小となる点をそれぞれ求めよ.

[5]  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy^2 + 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $f(x, \varphi(x)) = 0$  によって定義される 1 のある開近傍  $U \subseteq \mathbb{R}$  上の関数  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  が存在することを証明せよ.

(2)  $\varphi$  が極大, 極小となる点をそれぞれ求めよ.

[6]  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の  $C^1$  級関数とする.  $C = \{(x, y) \in U; f(x, y) = 0\}$  とおくと, 次のことを証明せよ.

(1)  $f'(a, b) \neq 0$  を満たす任意の  $(a, b) \in C$  に対し,  $C$  の  $(a, b)$  での接線  $T$  は

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0\}$$

である.

(2)  $f'(a, b) \neq 0$  を満たす任意の  $(a, b) \in C$  に対し,  $C$  の  $(a, b)$  での法線  $N$  は

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f_y(a, b)(x - a) - f_x(a, b)(y - b) = 0\}$$

である.

[7]  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $U$  上の  $C^1$  級関数とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) (Barrow の公式)  $[a, b] = \{(1 - t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U$  を満たす任意の  $a, b \in U$  に対して

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 J_f((1 - t)a + tb)(b - a)dt$$

が成り立つ.

(2) (有限増分の定理)  $[a, b] \subseteq U$  を満たす任意の  $a, b \in U$  に対して

$$|f(b) - f(a)| \leq \max_{x \in [a, b]} |J_f(x)| |b - a|$$

が成り立つ.

[8] (逆関数定理)  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $U$  上の  $C^n$  級関数とするとき,  $f$  が  $U$  から  $\mathbb{R}^2$  への単射であり, かつ

$$\forall x \in U, \det f'(x) \neq 0$$

ならば, 次の (i) を満たす  $\mathbb{R}^2$  の開集合  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  と次の (ii) を満たす  $V$  上の  $C^n$  級関数  $g: V \rightarrow U$  が存在することを証明せよ.

(i)  $f(U) = V$ .

(ii)  $g = f^{-1}$ .

さらに,

$$g'(f(x)) = f'(x)^{-1} \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

## ● Lagrange の乗数法と関数の条件付き極値

- [9]  $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \right\}$  とおくとき, 次の  $C$  上の関数

$$f(x, y) = x - y \quad ((x, y) \in C)$$

の  $C$  での最大値・最小値が存在することを証明し,  $f$  が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

- [10]  $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \right\}$  とおくとき, 次の  $C$  上の関数

$$f(x, y) = xy \quad ((x, y) \in C)$$

の  $C$  での最大値・最小値が存在することを証明し,  $f$  が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

- [11] (指定演習問題 5)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - xy + y^2 = 3\}$  とおくとき, 次の  $C$  上の関数

$$f(x, y) = x - y \quad ((x, y) \in C)$$

の  $C$  での最大値・最小値が存在することを証明し,  $f$  が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

- [12]  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 3\}$  とおくとき, 次の  $C$  上の関数

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 \quad ((x, y) \in C)$$

の  $C$  での最大値・最小値が存在することを証明し,  $f$  が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

- [13]  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 6\}$  とおくとき, 次の  $C$  上の関数

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y \quad ((x, y) \in C)$$

の  $C$  での最大値・最小値が存在することを証明し,  $f$  が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

- [14]  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x^3 + 5x^2 - y^2 = 0\}$  とおくとき, 次の  $C$  上の関数

$$f(x, y) = xy \quad ((x, y) \in C)$$

が極大, 極小となる点をそれぞれ求めよ.

- [15] (エントロピー)  $C = \{(x, y) \in (0, \infty)^2 ; x + y = 1\}$  とおくとき, 次の  $C$  上の関数

$$f(x, y) = x \log \frac{1}{x} + y \log \frac{1}{y} \quad ((x, y) \in C)$$

の  $C$  での最大値が存在することを証明し,  $f$  が最大となる点を求めよ.

- [16]  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$  とし,  $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; ax + by + c = 0\}$  とおくとき,  $(x_0, y_0)$  と  $L$  の距離  $d$  は

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

であることを証明せよ.

- 17  $a, b > 0$  とし,  $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$  とおくとき,  $E$  に内接する長方形の中から, 面積が最大の長方形とその面積を求めよ.
- 18 (等周問題) 周の長さが  $l > 0$  の長方形の中から, 面積が最大の長方形とその面積を求めよ.
- 19 (効用最大化問題) 消費財  $A, B$  の価格をそれぞれ  $a > 0, b > 0$  とする.  $A, B$  の消費量がそれぞれ  $x \geq 0, y \geq 0$  ならば, 消費者は効用  $u(x, y) \geq 0$  を得るとき, 次の問いに答えよ.
- (1) 消費者の支出を 1 とするとき, Lagrange の乗数法を用いて消費者の得る効用  $u(x, y)$  が最大となる消費量  $(x, y)$  を求める問題を定式化せよ.
  - (2) (Cobb-Douglas 型関数)  $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, u(x, y) = x^\alpha y^\beta$  のとき, (1) を解け.
- 20 (費用最小化問題) 消費財  $A, B$  の価格をそれぞれ  $a > 0, b > 0$  とする.  $A, B$  の消費量がそれぞれ  $x \geq 0, y \geq 0$  ならば, 消費者は効用  $u(x, y) \geq 0$  を得るとき, 次の問いに答えよ.
- (1) 消費者の得る効用  $u(x, y)$  を 1 とするとき, Lagrange の乗数法を用いて消費者の支出が最小となる消費量  $(x, y)$  を求める問題を定式化せよ.
  - (2) (Cobb-Douglas 型関数)  $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, u(x, y) = x^\alpha y^\beta$  のとき, (1) を解け.

## 第4章 多変数関数の積分法

### 4.1 有界閉区間での多重積分

#### ● 累次積分

[1] 次の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_{[0,a] \times [0,b]} ye^{xy} dx dy \quad (a, b > 0).$$

$$(2) \iint_{[a,b] \times [0,1]} y^x dx dy \quad (-1 < a < b).$$

[2] 次の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_{[0,a] \times [0,b]} xy \sin(x^2 + y^2) dx dy \quad (a, b > 0).$$

$$(2) \iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0,2]} x^2 y \sin(xy^2) dx dy.$$

[3] 次の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_{[0, \sqrt{3}] \times [0,1]} \frac{x}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy.$$

$$(2) \iint_{[0,1] \times [0, \sqrt{3}]} \frac{y}{1+x^2+y^2} dx dy.$$

[4]  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i < b_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) とし,  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  とおく.  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  を  $I$  上の有界関数で, 任意の  $a_1 \leq x_1 \leq b_1$  に対し,  $f_{x_1}$  が  $[a_2, b_2]$  で可積分であるものとする.  $[a_1, b_1]$  上の関数  $F: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$F(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \quad (a_1 \leq x_1 \leq b_1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1)  $f$  が  $I$  で連続ならば,  $F$  は  $[a_1, b_1]$  で連続である.

(2)  $f$  が  $I$  で連続かつ  $x_1$  について偏微分可能であり, かつ  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  が  $I$  で連続ならば,  $F$  は  $[a_1, b_1]$  で  $C^1$  級であり,

$$F'(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_2 \quad (a_1 \leq x_1 \leq b_1)$$

が成り立つ.

□5 (Frullani 積分)  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  を  $(0, \infty)$  上の  $C^1$  級関数とすると,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \beta$$

となる  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  が存在すれば, 任意の  $0 < a < b$  に対して

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = (\beta - \alpha) \log \frac{b}{a}$$

が成り立つことを証明せよ.

## 4.2 一般の集合での多重積分

### ● 面積

[1]  $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の部分集合とすると、次の等式を証明せよ。

$$(1) \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}.$$

$$(2) \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B.$$

$$(3) \chi_{A \setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B).$$

$$(4) \chi_{A \Delta B} = |\chi_A - \chi_B|. \text{ ただし, } A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

[2]  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の有界集合とすると、

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2; \chi_A \text{ は } x \text{ で連続でない}\}$$

が成り立つことを証明せよ。

[3] (指定演習問題 6)  $a, b > 0$  とし,  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $(0, 0), (a, 0), (a, b)$  を頂点とする閉三角形とすると、次の問いに答えよ。ただし,  $\sharp(*)$  は  $*$  の元の個数を表す。

(1)  $K = [0, a] \times [0, b]$  とし,  $\Delta \in \mathcal{D}(K)$  を

$$\Delta = \left\{ \left( \frac{k_1}{n}a, \frac{k_2}{n}b \right) ; (k_1, k_2) \in \{0, 1, \dots, n\}^2 \right\}$$

によって定義する。  $\underline{K} = \{(k_1, k_2); I_{(k_1, k_2)} \subseteq T\}$ ,  $\overline{K} = \{(k_1, k_2); I_{(k_1, k_2)} \cap T^i \neq \emptyset\}$  とおくと、 $\sharp(\underline{K}), \sharp(\overline{K})$  を求めよ。

(2)  $T$  が面積確定であることを証明し,  $T$  の面積を求めよ。

[4]  $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d$  とし,  $A = \mathbb{Q}^2 \cap ([a, b] \times [c, d])$  とおくと、次のことを証明せよ。

$$(1) A = (\mathbb{Q} \cap [a, b]) \times (\mathbb{Q} \cap [c, d]).$$

(2)  $A$  は面積確定でない。

[5]  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の有界集合とすると、次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ。

(i)  $A$  は面積確定である。

(ii)  $\partial A$  は面積零である。

[6]  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の有界集合とすると、 $A$  が面積確定ならば,  $A^i, \overline{A}$  は面積確定であり、

$$a(A^i) = a(A) = a(\overline{A})$$

が成り立つことを証明せよ。

## ● 可積分関数と多重積分

- [7]  $N \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の有界集合,  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  を  $N$  上の有界関数とすると,  $N$  が面積零ならば,  $f$  は  $N$  で可積分であり,

$$\iint_N f(x) dx = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

- [8]  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の有界集合,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  を  $A$  上の有界関数とし,  $N = \{x \in A ; f(x) \neq g(x)\}$  とおくと,  $N$  が面積零ならば, 次の (i), (ii) は同値であることを証明せよ.

(i)  $f$  は  $A$  で可積分である.

(ii)  $g$  は  $A$  で可積分である.

さらに, (i) または (ii) を満たせば,

$$\iint_A f(x) dx = \iint_A g(x) dx$$

が成り立つことを証明せよ.

## ● 累次積分

9 次の二重積分の値を求めよ.

(1)  $\iint_A \frac{y \sin x}{x} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq y \leq x \leq \pi\}.$

(2)  $\iint_A \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq \sqrt{3}, 0 \leq y \leq x^2\}.$

10 次の二重積分の値を求めよ.

(1)  $\iint_A e^{\frac{y}{x}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}.$

(2)  $\iint_A x e^{y^2} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, x^2 \leq y \leq 4\}.$

11 次の二重積分の値を求めよ.

(1)  $\iint_A \sqrt{xy} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq y^2, x^2 \leq y\}.$

(2)  $\iint_A \sqrt{x^2 + y} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 \leq y \leq 2a^2 - x^2\} (a > 0).$

12 次の二重積分の値を求めよ.

(1)  $\iint_A xy dx dy, A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} (a, b > 0).$

(2)  $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy, A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} (a, b > 0).$

13 次の累次積分の積分順序を交換せよ.

(1)  $\int_a^b \left( \int_a^x f(x, y) dy \right) dx \quad (0 < a < b).$

(2)  $\int_a^b \left( \int_0^x f(x, y) dy \right) dx \quad (0 < a < b).$

14 次の累次積分の積分順序を交換せよ.

(1)  $\int_0^a \left( \int_{x-a}^{-x+a} f(x, y) dy \right) dx \quad (a > 0).$

(2)  $\int_{-a}^a \left( \int_{x^2-a^2}^{-x^2+a^2} f(x, y) dy \right) dx \quad (a > 0).$

15 次の累次積分の積分順序を交換せよ.

(1)  $\int_0^a \left( \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx \quad (a > 0).$

(2)  $\int_0^a \left( \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+a} f(x, y) dy \right) dx \quad (a > 0).$

16 次の累次積分の積分順序を交換せよ.

$$(1) \int_0^a \left( \int_y^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x,y) dx \right) dy \quad (a > 0).$$

$$(2) \int_0^{2a} \left( \int_{\sqrt{2ay-y^2}}^{\sqrt{4a^2-y^2}} f(x,y) dx \right) dy \quad (a > 0).$$

### 4.3 変数変換公式

#### • アフィン写像と多重積分

[1]  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  とし,  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $\varphi$  の Jacobi 行列とその行列式を求めよ.

(2)  $\varphi$  が  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^2$  への全単射であるための  $A$  の必要十分条件を求めよ.

[2]  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc \neq 0$  とし,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (u, v) \in [0, 1]^2, (x, y) = (au + bv, cu + dv)\}$  とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $a, b, c, d > 0$  のとき,  $A$  の概形を図示せよ.

(2)  $A$  の面積を求めよ.

[3] 次の二重積分の値を求めよ.

(1)  $\iint_A (x^2 - y^2)^2 dx dy$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x - y| \leq a, |x + y| \leq b\}$  ( $a, b > 0$ ).

(2)  $\iint_A \frac{\log(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} dx dy$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x - y \leq a, 1 \leq x + y \leq b\}$  ( $a, b > 1$ ).

[4] (指定演習問題 7) 次の二重積分の値を求めよ.

(1)  $\iint_A (x^2 - y^2)e^{xy} dx dy$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x - y \leq a, 0 \leq x + y \leq b\}$  ( $a, b > 0$ ).

(2)  $\iint_A (x - y)^2 \sin(x^2 - y^2) dx dy$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x - y \leq \pi, 0 \leq x + y \leq 1\}$ .

[5] 次の二重積分の値を求めよ.

(1)  $\iint_A (x - y)^\alpha (x + y)^\beta dx dy$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$  ( $\alpha, \beta > 0$ ).

(2)  $\iint_A (x - y)^\alpha (x + y) dx dy$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$  ( $\alpha > 0$ ).

## ● 微分同相写像と多重積分

[6] 次の  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $\varphi$  の Jacobi 行列とその行列式を求めよ.

$$(1) \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ 2uv \end{pmatrix}.$$

$$(3) \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u(1-v) \\ uv \end{pmatrix}.$$

$$(4) \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u(1-v) \\ u(1+v) \end{pmatrix}.$$

[7]  $0 < a < b$ ,  $0 < c < d$  とし,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; ax \leq y \leq bx, c \leq xy \leq d\}$  とおくととき, 次の問いに答えよ.

(1)  $A$  の概形を図示せよ.

(2)  $A$  の面積を求めよ.

[8] 次の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_A \log(x^2 + y^2) dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\} \ (0 < a < b).$$

$$(2) \iint_A \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq a^2\} \ (a > 0).$$

[9] 次の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_A (x^2 + y^2) dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq c^2\} \ (a, b \in \mathbb{R}, c > 0).$$

$$(2) \iint_A \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq ax\} \ (a > 0).$$

[10] 次の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_A xy dx dy, A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 1 \right\} \ (a, b > 0).$$

$$(2) \iint_A xy dx dy, A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{4}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{4}} \leq 1 \right\} \ (a, b > 0).$$

## 4.4 広義多重積分

### • コンパクト近似列

**定義.**  $d \in \{1, 2\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^d$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  を  $\mathbb{R}^d$  の部分集合とする. 任意の  $r > 0$  に対して

$$B_r(a) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

のとき,  $a$  を  $A$  の**集積点**と言う.

[1]  $d \in \{1, 2\}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  を  $\mathbb{R}^d$  の部分集合とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

- (i)  $A$  は **Bolzano-Weierstrass** である. つまり,  $A$  の任意の無限部分集合  $B \subseteq A$  に対し,  $B$  のある集積点が存在する.
- (ii)  $A$  は点列コンパクトである.

[2]  $d \in \{1, 2\}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  を  $\mathbb{R}^d$  の部分集合とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

- (i)  $A$  は**全有界**である. つまり, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $\mathbb{R}^d$  のある有限点列  $\{x_1, \dots, x_n\}$  が存在し,

$$A \subseteq B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_n)$$

が成り立つ.

- (ii)  $A$  は有界である.

**定義.**  $d \in \{1, 2\}$ ,  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$  を  $\mathbb{R}^d$  の開集合族,  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  を  $\mathbb{R}^d$  の部分集合とする.

$$A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

のとき,  $\mathcal{U}$  を  $A$  の**開被覆**と言う.

[3]  $d \in \{1, 2\}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  を  $\mathbb{R}^d$  の部分集合とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

- (i)  $A$  は **Heine-Borel** である. つまり,  $A$  の任意の開被覆  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$  に対して  $\mathcal{U}$  のある有限集合列  $\{U_1, \dots, U_n\}$  が存在し,

$$A \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$$

が成り立つ.

- (ii)  $A$  はコンパクトである.

[4]  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の部分集合とし,  $\mathcal{K}(A)$  の集合列  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が次の (i), (ii) を満たすとする.

- (i)  $\forall n \in \mathbb{N}, K_n \subseteq K_{n+1}^i$ .
- (ii)  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = A$ .

このとき, 任意の  $K \in \mathcal{K}(A)$  に対し,  $K \subseteq K_n$  を満たす  $n \in \mathbb{N}$  が存在することを証明せよ.

## ● 非負値関数の広義多重積分

5 (指定演習問題 8) 次の広義二重積分が収束することを証明し, その値を求めよ.

$$(1) \iint_A \frac{1}{(1+x^2+y)^2} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, 0 \leq y \leq 2x\}.$$

$$(2) \iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x \leq 1, -x < y < x\}.$$

6  $a > 0, b, c \in \mathbb{R}, ac - b^2 > 0$  とするとき, 次の広義二重積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy$$

が収束することを証明し,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy = \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$$

が成り立つことも証明せよ.

7 次の広義二重積分が収束することを証明し, その値を求めよ.

$$(1) \iint_A e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 0 < x+y \leq 2\}.$$

$$(2) \iint_A \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-y}{x+y}\right) dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 0 < x+y \leq 1\}.$$

8 (Dirichlet 積分)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, x+y < 1\}$  とおくとき, 次の広義二重積分

$$I(a, b, c) = \iint_A x^{a-1} y^{b-1} (1-x-y)^{c-1} dx dy \quad (a, b, c > 0)$$

が収束することを証明し,

$$I(a, b, c) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} \quad (a, b, c > 0)$$

が成り立つことも証明せよ.

9 次の広義二重積分が収束するか否かを判定し, 収束すれば, その値を求めよ.

$$(1) \iint_{[a, \infty) \times [b, \infty)} \frac{1}{(x+y)^\alpha} dx dy \quad (a, b > 0, \alpha > 0).$$

$$(2) \iint_{(0, a] \times (0, b]} \frac{1}{(x+y)^\alpha} dx dy \quad (a, b > 0, \alpha > 0).$$

10 次の広義二重積分が収束するか否かを判定し, 収束すれば, その値を求めよ.

$$(1) \iint_A \frac{1}{(x-y)^\alpha} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x \leq 1, 0 \leq y < x\} \quad (\alpha > 0).$$

$$(2) \iint_A \frac{x^\alpha}{x^2+y^2} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq ax\} \quad (a > 0, 0 < \alpha < 2).$$

[11] 次の広義二重積分が収束するか否かを判定し, 収束すれば, その値を求めよ.

(1)  $\iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \geq a^2\} (a > 0, \alpha > 0).$

(2)  $\iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x^2 + y^2 \leq a^2\} (a > 0, \alpha > 0).$

[12] 次の広義二重積分が収束するか否かを判定し, 収束すれば, その値を求めよ.

(1)  $\iint_A \frac{\log(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \geq a^2\} (a > 0, \alpha > 0).$

(2)  $\iint_A \frac{1}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 < a^2\} (a > 0, \alpha > 0).$

## ● 一般の関数の広義多重積分

13  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の部分集合,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  を  $A$  上の関数で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

- (i) 任意の  $K \in \mathcal{K}(A)$  に対して  $f^\pm$  は  $K$  で可積分である.
- (ii)  $|f| \leq g$  を満たす  $A$  上の非負値広義可積分関数  $g: A \rightarrow [0, \infty)$  が存在する.

このとき,  $f$  は  $A$  で広義可積分であり,

$$\iint_A |f(x)| dx \leq \iint_A g(x) dx$$

が成り立つことを証明せよ.

14  $A = [0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}$  とし,  $A$  上の関数  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad ((x, y) \in A)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $f^\pm$  を求めよ.
- (2) 次の数列

$$I_n^+ = \iint_{[\frac{1}{n}, 1] \times [0, 1]} f^+(x, y) dx dy \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

の一般項を求めよ.

- (3) 次の数列

$$I_n^- = \iint_{[\frac{1}{n}, 1] \times [0, 1]} f^-(x, y) dx dy \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

の一般項を求めよ.

- (4)  $f$  が  $A$  で広義可積分でないことを証明せよ.

## 第5章 ベクトル場の微積分法

### 5.1 ベクトル場とその微分

#### ● ベクトル場の微分

- [1]  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の全微分可能スカラー場とすると,

$$\text{grad}(fg)(x) = \text{grad}f(x)g(x) + f(x)\text{grad}g(x) \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

- [2]  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の全微分可能スカラー場,  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $U$  上の全微分可能ベクトル場とすると,

$$\text{rot}(fg)(x) = \text{grad}f(x) \times g(x) + f(x)\text{rot}g(x) \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

- [3]  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の全微分可能スカラー場,  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $U$  上の全微分可能ベクトル場とすると,

$$\text{div}(fg)(x) = \text{grad}f(x) \cdot g(x) + f(x)\text{div}g(x) \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

- [4]  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  上の全微分可能ベクトル場とし,  $\mathbb{R}^2$  上のベクトル場  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$g(u, v) = Af(x, y), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ. ただし,  $I$  は 2 次単位行列を表す.

(1)  $J_g(u, v) = AJ_f(x, y)B$ .

(2) (発散の正則変換不変性)  $AB = I = BA$  ならば,  $\text{div}f(x, y) = \text{div}g(u, v)$ .

## 5.2 線積分とその基本性質

### ● 線積分 I

1 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C xy d\sigma$ ,  $C$  は  $(a, c)$  と  $(b, d)$  を結ぶ線分 ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ).

(2)  $\int_C xy d\sigma$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$  ( $a, b \in \mathbb{R}, r > 0$ ).

2 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C x^2 d\sigma$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b, y = \log x\}$  ( $0 < a < b$ ).

(2)  $\int_C y^2 d\sigma$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2\}$  ( $r > 0$ ).

3 (指定演習問題 9) 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C y d\sigma$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; c \leq y \leq d, y^2 = 4px\}$  ( $c, d \in \mathbb{R}, c < d, p > 0$ ).

(2)  $\int_C y d\sigma$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}\}$  ( $r > 0$ ).

4 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C x d\sigma$ ,  $C = \{(r(t - \sin t), r(1 - \cos t)) ; 0 \leq t \leq 2\pi\}$  ( $r > 0$ ).

(2)  $\int_C y d\sigma$ ,  $C = \{(r(t - \sin t), r(1 - \cos t)) ; 0 \leq t \leq 2\pi\}$  ( $r > 0$ ).

5 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} d\sigma$ ,  $C$  は  $(1, \tan \theta)$  と  $(1, \tan \varphi)$  を結ぶ線分  $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta, \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ .

(2)  $\int_C \frac{x^2}{x^2 + y^2} d\sigma$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2\}$  ( $r > 0$ ).

6 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C \frac{y}{x^2 + y^2} d\sigma$ ,  $C$  は  $(1, \tan \theta)$  と  $(1, \tan \varphi)$  を結ぶ線分  $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta, \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ .

(2)  $\int_C \frac{y^2}{4x^2 + y^2} d\sigma$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; c \leq y \leq d, y^2 = 4px\}$  ( $c, d \in \mathbb{R}, c < d, p > 0$ ).

7 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C \frac{1}{x-y} d\sigma$ ,  $C$  は  $(0, -b)$  と  $(a, 0)$  を結ぶ線分 ( $a, b > 0$ ).

(2)  $\int_C \frac{1}{x-y} d\sigma$ ,  $C$  は  $(0, -b)$  と  $(a, -b)$  と  $(a, 0)$  を結ぶ折線 ( $a, b > 0$ ).

- 8 (平均値)  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の連続スカラー場とし,  $\overline{B_r(x)} \subseteq U$  を満たす任意の  $x \in U$ ,  $r > 0$  に対して

$$\varphi(x, r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(x)} f(y) d\sigma, \quad \psi(x, r) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(x)} f(y) dy$$

とおくとき, 次のことを証明せよ.

- (1) 任意の  $x \in U$  に対して  $\lim_{r \rightarrow +0} \varphi(x, r) = f(x)$ .  
(2)  $\overline{B_r(x)} \subseteq U$  を満たす任意の  $x \in U$ ,  $r > 0$  に対して

$$\psi(x, r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r \varphi(x, s) s ds$$

が成り立つ.

## ● 線積分 II

9 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C (x, y) \cdot (dx, dy)$ ,  $C$  は  $(0, 0)$  と  $(a, b)$  を結ぶ線分 ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

(2)  $\int_C (x, y) \cdot (dx, dy)$ ,  $C$  は  $(0, 0)$  と  $(a, 0)$  と  $(a, b)$  を結ぶ折線 ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

10 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C (-y, x) \cdot (dx, dy)$ ,  $C$  は  $(a, c)$  と  $(b, d)$  を結ぶ線分 ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ).

(2)  $\int_C (-y, x) \cdot (dx, dy)$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; c \leq y \leq d, y^2 = 4px\}$  ( $c, d \in \mathbb{R}, c < d, p > 0$ ).

11 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C (x^2 - y^2, 2xy) \cdot (dx, dy)$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0, x^2 + y^2 = r^2\}$  ( $r > 0$ ).

(2)  $\int_C (x^2 - y^2, 2xy) \cdot (dx, dy)$ ,  $C = \{(r(1 - \cos t) \cos t, r(1 - \cos t) \sin t) ; 0 \leq t \leq \pi\}$  ( $r > 0$ ).

12 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C (e^x \cos y, -e^x \sin y) \cdot (dx, dy)$ ,  $C$  は  $(-a, 0)$  と  $(0, b)$  と  $(a, 0)$  を結ぶ折線 ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

(2)  $\int_C (e^x \cos y, -e^x \sin y) \cdot (dx, dy)$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \leq 0, x^2 + y^2 = r^2\}$  ( $r > 0$ ).

13 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \cdot (dx, dy)$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2\}$  ( $r > 0$ ).

(2)  $\int_C \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \cdot (dx, dy)$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2\}$  ( $r > 0$ ).

14  $C \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  を  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  上の向き付けられた  $C^1$  級曲線とし, 任意の  $\theta \in \mathbb{R}$  に対して

$$C(\theta) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C \right\}$$

とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の  $\theta \in \mathbb{R}$  に対して  $l(C(\theta)) = l(C)$ .

(2) 任意の  $\theta \in \mathbb{R}$  に対して

$$\int_{C(\theta)} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \cdot (dx, dy) = \int_C \left( -\frac{v}{u^2 + v^2}, \frac{u}{u^2 + v^2} \right) \cdot (du, dv)$$

が成り立つ.

### ● 線積分 III

15 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ ,  $C$  は  $(1, \tan \theta)$  と  $(1, \tan \varphi)$  を結ぶ線分  $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta, \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ .

(2)  $\int_C \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0, x^2 + y^2 = r^2\} \ (r > 0)$ .

16 次の線積分の値を求めよ.

(1)  $\int_C \frac{y}{x^2 + y^2} dy$ ,  $C$  は  $(1, \tan \theta)$  と  $(1, \tan \varphi)$  を結ぶ線分  $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta, \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ .

(2)  $\int_C \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx$ ,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; c \leq y \leq d, y^2 = 4px\} \ (c, d \in \mathbb{R}, c < d, p > 0)$ .

## 5.3 Green の定理, Gauss の定理

### • 区分的 $C^1$ 級領域

- [1] (微分積分学の基本定理)  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  を  $[a, b]$  上の微分可能関数で,  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  を満たすものとする.

$$c = \min_{a \leq x \leq b} \varphi(x), \quad d = \max_{a \leq x \leq b} \psi(x)$$

とおき,  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  を  $[a, b] \times [c, d]$  上の  $C^1$  級関数とすると,

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つことを証明せよ.

## ● Green の定理

[2]  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  とし,  $\mathbb{R}^2$  上のベクトル場  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき,  $\operatorname{rot} f = 0$ ,  $\operatorname{div} f = 0$  であるための  $A$  の必要十分条件をそれぞれ求めよ.

[3]  $\mathbb{R}^2$  上のベクトル場  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $\operatorname{rot} f$  を求めよ.

(2)  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ ,  $c < d$ ,  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $[a, b] \times [c, d]$  の周とすると, 次の線積分

$$\int_C f(x, y) \cdot (dx, dy)$$

の値を求めよ.

[4]  $\mathbb{R}^2$  上のベクトル場  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f(x, y) = (e^x \cos y, -e^x \sin y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $\operatorname{rot} f$  を求めよ.

(2)  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  上の向き付けられた区分的  $C^1$  級単純閉曲線とすると, 次の線積分

$$\int_C f(x, y) \cdot (dx, dy)$$

の値を求めよ.

[5]  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$  とし,  $D$  上のベクトル場  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f(x, y) = \left( \log \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right) \quad ((x, y) \in D)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $\operatorname{rot} f$  を求めよ.

(2)  $0 < a < b$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ ,  $c < d$ ,  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $[a, b] \times [c, d]$  の周とすると, 次の線積分

$$\int_C f(x, y) \cdot (dx, dy)$$

の値を求めよ.

□6  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  上のベクトル場  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0))$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $\operatorname{rot} f$  を求めよ.

(2)  $C \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  を  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  上の向き付けられた区分的  $C^1$  級単純閉曲線とすると, 次の線積分

$$\int_C f(x, y) \cdot (dx, dy)$$

の値を求めよ.

□7  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  上のベクトル場  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0))$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $\operatorname{rot} f$  を求めよ.

(2)  $C \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  を  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  上の向き付けられた区分的  $C^1$  級単純閉曲線とすると, 次の線積分

$$\int_C f(x, y) \cdot (dx, dy)$$

の値を求めよ.

□8 (スーパー楕円)  $a, b > 0$  とし,  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} < 1 \right\}$  とおくと, 次の問いに答えよ.

(1)  $D$  の概形を図示せよ.

(2)  $D$  の面積を求めよ.

□9 (スーパー楕円)  $a, b > 0$  とし,  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{4}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{4}} < 1 \right\}$  とおくと, 次の問いに答えよ.

(1)  $D$  の概形を図示せよ.

(2)  $D$  の面積を求めよ.

## ● Gauss の定理

- [10] (転置)  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  上の向き付けられた  $C^1$  級パラメータ曲線とし,  $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$  とおく.  $A \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $C$  上の連続ベクトル場とすると,

$$\int_C Af(x) \cdot dx = \int_C f \cdot {}^t A \tau(x) d\sigma$$

が成り立つことを証明せよ.

- [11] (Green の公式)  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の区分的  $C^1$  級有界領域,  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\bar{D}$  上の  $C^2$  級スカラー場とすると,

$$\iint_D \Delta f(x) dx = \int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) d\sigma$$

が成り立つことを証明せよ.

- [12] (Green の公式)  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の区分的  $C^1$  級有界領域,  $f, g : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\bar{D}$  上の  $C^2$  級スカラー場とすると,

$$\iint_D (f(x)\Delta g(x) - \Delta f(x)g(x)) dx = \int_{\partial D} \left( f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) g(x) \right) d\sigma$$

が成り立つことを証明せよ.

- [13] (Green の公式)  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の区分的  $C^1$  級有界領域,  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\bar{D}$  上の  $C^2$  級スカラー場とする.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  上の関数  $E : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|} \quad (x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0)$$

によって定義するとき,

$$f(x) = - \iint_D E(x-y) \Delta f(y) dy + \int_{\partial D} \left( E(x-y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial E}{\partial \nu}(x-y) f(y) \right) d\sigma \quad (x \in D)$$

が成り立つことを証明せよ.

- [14] (平均値)  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の  $C^2$  級スカラー場とし,  $\overline{B_r(x)} \subseteq U$  を満たす任意の  $x \in U$ ,  $r > 0$  に対して

$$\varphi(x, r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(x)} f(y) d\sigma$$

とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の  $x \in U$  に対して  $\lim_{r \rightarrow +0} \varphi(x, r) = f(x)$ .

(2)  $\overline{B_r(x)} \subseteq U$  を満たす任意の  $x \in U$ ,  $r > 0$  に対して

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x, r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{B_r(x)} \Delta f(y) dy$$

が成り立つ.

- 15 (平均値の定理)  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の  $C^2$  級スカラー場とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i)  $-\Delta f \leq 0$ . つまり,  $\forall x \in U, -\Delta f(x) \leq 0$ .

(ii)  $\overline{B_r(x)} \subseteq U$  を満たす任意の  $x \in U, r > 0$  に対して

$$f(x) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(x)} f(y) d\sigma$$

が成り立つ.

- 16 (平均値の定理)  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の  $C^2$  級スカラー場とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i)  $-\Delta f \geq 0$ . つまり,  $\forall x \in U, -\Delta f(x) \geq 0$ .

(ii)  $\overline{B_r(x)} \subseteq U$  を満たす任意の  $x \in U, r > 0$  に対して

$$f(x) \geq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(x)} f(y) d\sigma$$

が成り立つ.

## 5.4 スカラー・ポテンシャル

### ● スカラー・ポテンシャルの存在条件

- [1]  $a, b \in \mathbb{R}, a < b, x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  上の向き付けられた  $C^2$  級曲線とし,  $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ ,  $v = |x'|$  とおく.  $m > 0, f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $C$  上の連続ベクトル場とすると, 次のことを証明せよ.

(1) (Newton の運動方程式)  $f$  が

$$f(x(t)) = mx''(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

を満たせば,

$$\int_C f(x) \cdot dx = \frac{1}{2}mv(b)^2 - \frac{1}{2}mv(a)^2$$

が成り立つ.

(2) (保存力場)  $f = -\text{grad}\varphi$  を満たす  $C$  上の  $C^1$  級スカラー場  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}$  が存在すれば,

$$\int_C f(x) \cdot dx = \varphi(x(b)) - \varphi(x(a))$$

が成り立つ.

(3) (力学的エネルギー保存則)  $[a, b]$  上のスカラー場  $E : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$E(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + f(x(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

によって定義するとき,  $f$  が (1), (2) を満たせば,  $E(a) = E(b)$  が成り立つ.

- [2]  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  上のベクトル場  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0))$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $\text{rot} f$  を求めよ.

(2)  $f$  のスカラー・ポテンシャルが存在するか否かを判定し, 存在すれば, それを一つ求めよ.

- [3]  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  上のベクトル場  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0))$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $\text{rot} f$  を求めよ.

(2)  $f$  のスカラー・ポテンシャルが存在するか否かを判定し, 存在すれば, それを一つ求めよ.

## ● Poincaré の補題

- 4 (指定演習問題 10)  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  を  $\mathbb{R}^2$  のホモトープな単連結領域,  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  を  $D$  上の  $C^2$  級関数とするとき,  $u$  が  $D$  で調和ならば, つまり,

$$\Delta u = 0$$

を満たせば, 次の (i), (ii) を満たす  $D$  上の  $C^2$  級関数  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  が存在することを証明せよ.

- (i) (Cauchy-Riemann 方程式)  $u, v$  は  $D$  で

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

を満たす.

- (ii)  $v$  は  $D$  で調和である.

【補足】  $v$  を  $u$  の共役調和関数と言う.

- 5  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $u$  が  $\mathbb{R}^2$  で調和であることを証明し,  $u$  の共役調和関数  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を一つ求めよ.
- (2)  $(u, v)$  のスカラー・ポテンシャルが存在するか否かを判定し, 存在すれば, それを一つ求めよ.

- 6  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $u$  が  $\mathbb{R}^2$  で調和であることを証明し,  $u$  の共役調和関数  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を一つ求めよ.
- (2)  $(u, v)$  のスカラー・ポテンシャルが存在するか否かを判定し, 存在すれば, それを一つ求めよ.

- 7  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0\}$  とし,  $D$  上の関数  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \in D)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $u$  が  $D$  で調和であることを証明し,  $u$  の共役調和関数  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  を一つ求めよ.
- (2)  $(u, v)$  のスカラー・ポテンシャルが存在するか否かを判定し, 存在すれば, それを一つ求めよ.

## 関連図書

- [1] 齋藤 正彦, 微分積分学, 東京図書, 2006 年.
- [2] 杉浦 光夫, 解析入門 I(基礎数学), 東京大学出版会, 1980 年.
- [3] 杉浦 光夫, 解析入門 II(基礎数学), 東京大学出版会, 1985 年.