

微分積分学III 演習問題

柿澤 亮平

島根大学学術研究院 教育学系 数学科教育専攻

目次

第 1 章	ベクトル空間	1
1.1	ベクトル空間上の内積	1
1.2	ベクトル空間上の位相	3
1.3	点列の極限	7
第 2 章	多変数関数の微分法	10
2.1	関数の極限	10
2.2	連続関数, 一様連続関数, 半連続関数	11
2.3	全導関数と接平面	14
第 3 章	Taylor の定理, 陰関数定理	19
3.1	高階偏導関数	19
3.2	Taylor の定理と関数の極大・極小	22
3.3	陰関数定理と関数の条件付き極値	24
第 4 章	多変数関数の積分法	28
4.1	有界閉区間での多重積分	28
4.2	一般の集合での多重積分	30
4.3	変数変換公式	34
4.4	広義多重積分	36
第 5 章	ベクトル場の微積分法	40
5.1	ベクトル場とその微分	40
5.2	線積分とその基本性質	41
5.3	Green の定理, Gauss の定理	45
5.4	スカラー・ポテンシャル	50

第1章 ベクトル空間

1.1 ベクトル空間上の内積

● ベクトル空間

1 2次ベクトルの乗法を

$$xy = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義すると, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ は2次ベクトルの乗法について**可換群**である. つまり, 次の (i)–(iv) を満たすことを証明せよ.

(i) $(xy)z = x(yz) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}^2).$

(ii) $\exists! 1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}^2, x1 = x = 1x.$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \exists! x^{-1} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, xx^{-1} = 1 = x^{-1}x.$

(iv) $xy = yx \quad (x, y \in \mathbb{R}^2).$

2 2次ベクトルの大小相等を

$$x \leq y \Leftrightarrow (x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2) \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義すると, $\mathbb{R}^2$ は2次ベクトルの大小相等について**順序集合**である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^2, x \leq x.$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, ((x \leq y) \wedge (x \geq y) \Rightarrow x = y).$

(iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2, ((x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z).$

3 $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} ; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) $\mathcal{C}$ は2次正方行列の加法・スカラー乗法について線型空間である.

(2) $\mathcal{C}$ 上の関数 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(X) = (x_1, x_2) \quad \left(X = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \right)$$

によって定義すると, f は $\mathcal{C}$ から $\mathbb{R}^2$ への線型空間の同型写像である.

● ベクトル空間上の内積・ノルム・距離

- 4 (指定演習問題 1) $\{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の標準基底, $(\mathbb{R}^2)^*$ を $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への線型写像全体の集合とすると, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $f \in (\mathbb{R}^2)^*$ に対して $b(f)$ を

$$b(f) = (f(e_1), f(e_2))$$

によって定義すると,

$$f(x) = \langle x, b(f) \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $f \in (\mathbb{R}^2)^*$ に対して $\|f\|$ を

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{|x|} ; x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0 \right\}$$

によって定義すると,

$$\|f\| = |b(f)|$$

が成り立つ.

- 5 (中線定理) 次の等式

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2) \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つことを証明せよ.

- 6 次の不等式

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つことを証明せよ.

- 7 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して $|x|_1$ を

$$|x|_1 = |x_1| + |x_2|$$

によって定義すると, $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_1)$ はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ.

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}^2, (|x|_1 \geq 0) \wedge (|x|_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.
- (ii) (三角不等式) $|x+y|_1 \leq |x|_1 + |y|_1 \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$.
- (iii) $|ax|_1 = |a||x|_1 \quad (a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2)$.

- 8 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して $|x|_\infty$ を

$$|x|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

によって定義すると, $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_\infty)$ はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ.

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}^2, (|x|_\infty \geq 0) \wedge (|x|_\infty = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.
- (ii) (三角不等式) $|x+y|_\infty \leq |x|_\infty + |y|_\infty \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$.
- (iii) $|ax|_\infty = |a||x|_\infty \quad (a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2)$.

1.2 ベクトル空間上の位相

• ベクトル空間の開集合・閉集合

- [1] 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して $|x|_1$ を

$$|x|_1 = |x_1| + |x_2|$$

によって定義する. $a \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ とするとき, 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |x - a|_1 < r\}$$

の概形を図示せよ.

- [2] 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して $|x|_\infty$ を

$$|x|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

によって定義する. $a \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ とするとき, 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 ; |x - a|_\infty < r\}$$

の概形を図示せよ.

- [3] $d \in \{1, 2\}$ とする. 任意の $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$A^i = \{x \in \mathbb{R}^d ; \exists r > 0, B_r(x) \subseteq A\}$$

とおくとき, $*$ が次の (i)–(iv) を満たすことを証明せよ.

(i) $(\mathbb{R}^d)^i = \mathbb{R}^d$.

(ii) $A^i \subseteq A$ ($A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$).

(iii) $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$ ($A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$).

(iv) $(A^i)^i = A^i$ ($A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$).

- [4] (Kuratowski の公理) $d \in \{1, 2\}$ とする. 任意の $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^d ; \forall r > 0, B_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

とおくとき, $\overline{}$ が次の (i)–(iv) を満たすことを証明せよ.

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(ii) $A \subseteq \overline{A}$ ($A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$).

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ($A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$).

(iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ($A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$).

- [5] 次の $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が開, 閉, またはどちらでもないかを判定せよ.

(1) $A = (a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$).

(2) $A = (a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$).

[6] 次の $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が開, 閉, またはどちらでもないかを判定せよ.

(1) $A = (a, \infty)$ ($a \in \mathbb{R}$).

(2) $A = (-\infty, b]$ ($b \in \mathbb{R}$).

[7] $d \in \{1, 2\}$ とする.

$$\mathcal{O} = \{U \subseteq \mathbb{R}^d; U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U^i\}$$

とおくとき, $\mathcal{O}$ が次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ. ただし, $\#(*)$ は $*$ の元の個数を表す.

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}, \mathbb{R}^d \in \mathcal{O}$.

(ii) $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \left((\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}) \wedge (\#(\mathcal{U}) < \infty) \Rightarrow \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{O} \right)$.

(iii) $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \left(\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{O} \right)$.

[8] $d \in \{1, 2\}$ とする.

$$\mathcal{A} = \{F \subseteq \mathbb{R}^d; F = \overline{F}\}$$

とおくとき, $\mathcal{A}$ が次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ. ただし, $\#(*)$ は $*$ の元の個数を表す.

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}, \mathbb{R}^d \in \mathcal{A}$.

(ii) $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \left((\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}) \wedge (\#(\mathcal{F}) < \infty) \Rightarrow \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathcal{A} \right)$.

(iii) $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \left(\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathcal{A} \right)$.

[9] $d \in \{1, 2\}$ とする. 任意の $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{O}; U \subseteq A\}$ とおくと,

$$A^i = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

が成り立つ. つまり, A^i は A に含まれる最大の $\mathbb{R}^d$ の開集合であることを証明せよ.

[10] $d \in \{1, 2\}$ とする. 任意の $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{A}; F \supseteq A\}$ とおくと,

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

が成り立つ. つまり, $\overline{A}$ は A を含む最小の $\mathbb{R}^d$ の閉集合であることを証明せよ.

[11] (第 1 分離公理) $d \in \{1, 2\}$ とするとき, 任意の $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$B_r(x) \cap \{y\} = \emptyset$$

を満たす $r > 0$ が存在することを証明せよ.

[12] (第 4 分離公理) $d \in \{1, 2\}$ とするとき, $\mathbb{R}^d$ の任意の閉集合 $F, G \subseteq \mathbb{R}^d$ に対し,

$$F \subseteq U, \quad G \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset$$

を満たす $\mathbb{R}^d$ の開集合 $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ が存在することを証明せよ.

● ベクトル空間の連結集合・コンパクト集合

13 $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の連結集合とすると,

$$A \subseteq B \subseteq \overline{A}$$

を満たす $\mathbb{R}^d$ の任意の部分集合 $B \subseteq \mathbb{R}^d$ は連結であることを証明せよ.

14 $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ の連結集合族とすると,

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, (A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset)$$

ならば, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ は連結であることを証明せよ.

定義. $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする. A が**弧状連結**であるとは, 任意の $a, b \in A$ に対し, 次の (i), (ii) を満たす $[0, 1]$ 上の連続関数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ が存在することを言う.

(i) $f(0) = a, f(1) = b$.

(ii) $f([0, 1]) = \{f(t); 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$.

15 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $a \in A$ とするとき, A が a について**星型**ならば, つまり,

$$\forall b \in \mathbb{R}^2, (b \in A \Rightarrow \{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A)$$

ならば, A は弧状連結であることを証明せよ.

16 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とすると, A が**凸**ならば, つまり,

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^2, (a, b \in A \Rightarrow \{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A)$$

ならば, A は任意の $a \in A$ について星型であることを証明せよ.

17 $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) A は $\mathbb{R}$ の**区間**である. つまり, $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a, b \in A \Rightarrow \{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A)$.

(ii) A は連結である.

18 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とすると, A が弧状連結ならば, A は連結であることを証明せよ.

19

$$A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) ; x > 0 \right\}$$

とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) $\overline{A} = A \cup \{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$.

(2) $\overline{A}$ は連結であるが, 弧状連結でない.

20 $d \in \{1, 2\}$ とするとき, $\mathbb{R}^d$ の有限集合がコンパクトであることを証明せよ.

[21] $d \in \{1, 2\}$, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ のコンパクト集合族とすると,

$$\sharp(\mathcal{K}) < \infty$$

ならば, $\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ はコンパクトであることを証明せよ. ただし, $\sharp(*)$ は $*$ の元の個数を表す.

[22] $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

- (i) A は $\mathbb{R}$ の有界閉区間である.
- (ii) A は連結かつコンパクトである.

1.3 点列の極限

● 点列の収束・発散

□1 (指定演習問題 2) $d \in \{1, 2\}$, $a \in \mathbb{R}^d$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とすると、次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ。

(i) $a \in \overline{A}$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ となる A の点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する。

□2 $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ とし、 $\mathbb{R}^2$ の点列 $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -ab & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき、次の問いに答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -ab & a+b \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ とおくと、 $P^{-1}AP$ を求めよ。

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項を求めよ。

(3) $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するための a, b の必要十分条件を求め、その条件のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ の値を求めよ。

□3 $a \in \mathbb{R}$ とし、 $\mathbb{R}^2$ の点列 $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき、次の問いに答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、 $P^{-1}AP$ を求めよ。

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項を求めよ。

(3) $\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するための a の必要十分条件を求め、その条件のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ の値を求めよ。

【補足】 $P^{-1}AP$ を A の標準化と言う。

● Bolzano-Weierstrass の定理

[4] $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を A の点列, $\alpha \in \overline{A}$ とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.

(ii) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の任意の収束する部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ に対して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n(k)} = \alpha$$

となる.

[5] $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) A は点列コンパクトである. つまり, A の任意の点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対し, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の A に収束する部分列が存在する.

(ii) A はコンパクトである.

● Cauchy の定理

[6] $\theta \in \mathbb{R}, \theta \neq 0$ とするとき, $\left\{ \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束しないことを証明せよ.

[7] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とし, 数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$s_n = \sum_{k=0}^n |a_{k+1} - a_k| \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $m < n$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n - a_m| \leq s_{n-1} - s_{m-1}$$

が成り立つ.

(2) $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}$ の Cauchy 列ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ の Cauchy 列である.

[8] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列で, ある $0 < r < 1$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r |a_n - a_{n-1}|$$

が成り立つものとするとき, 次のことを証明せよ.

(1) $m < n$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \frac{r^m - r^n}{1 - r} |a_1 - a_0|$$

が成り立つ.

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ の Cauchy 列である.

第2章 多変数関数の微分法

2.1 関数の極限

● スカラー値関数の極限

[1] $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $(a, b) \in A$, $f : A \setminus \{(a, b)\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \setminus \{(a, b)\}$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \alpha.$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall (r, \theta) \in B, (0 < r < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) - \alpha| < \varepsilon).$

ただし, $B = \{(r, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} ; (a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \in A\}.$

[2] 次の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}.$

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}.$

[3] 次の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x(1 - y^n) - y(1 - x^n) - x^n + y^n}{(1 - x)(1 - y)(x - y)} \quad (n \in \mathbb{N}).$

2.2 連続関数, 一様連続関数, 半連続関数

● スカラー値連続関数

[1] 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f が $(0, 0)$ で連続であるか否かを判定せよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

[2] 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f が $(0, 0)$ で連続であるか否かを判定せよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

[3] $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $(a, b) \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とすると, 次の (i) $\Rightarrow$ (ii) を証明し, (i) $\Leftarrow$ (ii) の反例を一つ挙げよ.

(i) f は (a, b) で連続である.

(ii) $f(*, b)$ は a で連続であり, $f(a, *)$ は b で連続である.

● ベクトル値連続関数

4 $a \in \mathbb{R}^2$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の関数とすると、次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ。

(i) f は a で連続である。

(ii) $f(a) \in V$ を満たす $\mathbb{R}^2$ の任意の開集合 $V \subseteq \mathbb{R}^2$ に対して $a \in U$ を満たす $\mathbb{R}^2$ のある開集合 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ が存在し、

$$f(U) \subseteq V$$

が成り立つ。

5 (Banach の不動点定理) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の関数で、ある $0 < r < 1$ が存在し、

$$|f(x) - f(y)| \leq r|x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つものとするとき、次のことを証明せよ。

(1) $x \in \mathbb{R}^2$ とし、 $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 = x, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義すると、任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}|$$

が成り立つ。

(2) $f(\alpha) = \alpha$ を満たす $\alpha \in \mathbb{R}^2$ が一意に存在する。

【補足】 f を $\mathbb{R}^2$ 上の縮小写像と言い、 α を f の不動点と言う。

● 最大値の定理

[6] $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の非有界閉集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の連続関数で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $f(a, b) > 0$ を満たす $(a, b) \in A$ が存在する.

(ii) $\lim_{(x,y) \in A, |(x,y)| \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$.

このとき, f の A での最大値が存在することを証明せよ.

[7] $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の非有界閉集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の連続関数で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $f(a, b) < 0$ を満たす $(a, b) \in A$ が存在する.

(ii) $\lim_{(x,y) \in A, |(x,y)| \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$.

このとき, f の A での最小値が存在することを証明せよ.

[8] 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

の $\mathbb{R}^2$ での最大値・最小値が存在することを証明し, f が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

[9] $A = [0, \infty)^2$ とおくと, 次の A 上の関数

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x+y)} \quad ((x, y) \in A)$$

の A での最大値・最小値が存在することを証明し, f が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

2.3 全導関数と接平面

● スカラー値関数の方向導関数・偏導関数

- [1] $e = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ とするとき, 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f が $(0, 0)$ で e 方向に微分可能であるか否かを判定し, e 方向に微分可能ならば, $\frac{\partial f}{\partial e}(0, 0)$ を求めよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

- [2] $e = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ とするとき, 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f が $(0, 0)$ で e 方向に微分可能であるか否かを判定し, e 方向に微分可能ならば, $\frac{\partial f}{\partial e}(0, 0)$ を求めよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

- [3] 次の関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を求めよ.

$$(1) f(x, y) = \log(x^2 + 2xy - y^2).$$

$$(2) f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}.$$

- [4] 次の関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を求めよ.

$$(1) f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy - y^2}.$$

$$(2) f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}.$$

● スカラー値関数の全導関数

□5 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f が $(0, 0)$ で全微分可能であるか否かを判定せよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

□6 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f が $(0, 0)$ で全微分可能であるか否かを判定せよ.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)). \end{cases}$$

● ベクトル値関数の全導関数

[7] $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の全微分可能関数とし, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(u, v) = f(x, y), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $g'(u, v) = {}^t A f'(x, y)$.

(2) $|f'(x, y)| = |g'(u, v)|$ であるための A の必要十分条件は,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

を満たす $\theta \in \mathbb{R}$ が存在することである.

[8] (Cauchy-Riemann 方程式) $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ U, V 上の全微分可能関数とするとき, f が

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \quad (x \in U)$$

を満たせば,

$$|(g \circ f)'(x)| = |g'(f(x))| |f'_1(x)| \quad (x \in U),$$

$$|(g \circ f)'(x)| = |g'(f(x))| |f'_2(x)| \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

[9] (指定演習問題 3) (進行波) $c > 0$, $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とするとき, u が

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たせば, u は $x - ct$ の関数である. つまり,

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たす $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在することを証明せよ.

[10] (後退波) $c > 0$, $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とするとき, u が

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たせば, u は $x + ct$ の関数である. つまり,

$$u(x, t) = f(x + ct) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たす $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在することを証明せよ.

[11] $m \in \mathbb{N}$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とすると、次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $f(ax) = a^m f(x)$ ($a > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$).

(ii) $\langle x, f'(x) \rangle = mf(x)$ ($x \in \mathbb{R}^2$).

[12] $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ をそれぞれ U, V 上の全微分可能関数とするとき,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

● 接平面

13 次の U 上の関数 f のグラフ $G(f)$ の $(a, b, f(a, b)) \in G(f)$ での接平面 $T_{(a,b)}(f)$ の方程式を求めよ.

(1) $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$, $U = \mathbb{R}^2$.

(2) $f(x, y) = \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$, $U = B_c(0, 0)$ ($c > 0$).

14 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の a で全微分可能な関数とするとき, $f'(a) \neq 0$ ならば, 次の $\partial B_1(0)$ 上の関数

$$g(e) = \frac{\partial f}{\partial e}(a) \quad (e \in \partial B_1(0))$$

の $\partial B_1(0)$ での最大値・最小値が存在することを証明し, g が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

第3章 Taylor の定理, 陰関数定理

3.1 高階偏導関数

● 多重指数

[1] $n \in \mathbb{N}$ とするとき, 次の等式を証明せよ. ただし, $\sharp(*)$ は $*$ の元の個数を表す.

$$(1) \sharp(\{\alpha \in \mathbb{N}^2 ; |\alpha| = n\}) = n + 1.$$

$$(2) \sharp(\{\alpha \in \mathbb{N}^2 ; |\alpha| < n\}) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

[2] $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ とするとき, 次の和を書き下せ.

$$(1) \sum_{|\alpha|=2} \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

$$(2) \sum_{|\alpha|<2} \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

[3] (二項定理) 任意の $\alpha \in \mathbb{N}^2$ に対して

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つことを証明せよ.

[4] (Leibniz の法則) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $n \in \mathbb{N}$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の C^n 級関数とすると, $|\alpha| = n$ を満たす任意の $\alpha \in \mathbb{N}^2$ に対して

$$(fg)^{(\alpha)}(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} f^{(\alpha-\beta)}(x) g^{(\beta)}(x) \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

● n 階偏導関数

[5] $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, 次の $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の関数

$$f(x) = |x|^\alpha \quad (x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

の 2 階偏導関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ($i, j \in \{1, 2\}$) を求めよ.

定義.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を Laplace 作用素と言う.

[6] 次の $\mathbb{R}^2$ の開集合 U 上の関数 f が U で調和である. つまり,

$$\Delta f = 0$$

を満たすことを証明せよ.

$$(1) f(x, y) = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3, U = \mathbb{R}^2.$$

$$(2) f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}, U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

[7] 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は $\mathbb{R}^2$ で C^1 級であるが, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ であることを証明せよ.

[8] 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は $\mathbb{R}^2$ で C^1 級であるが, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ であることを証明せよ.

定義.

$$\Delta_S = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

を Laplace-Beltrami 作用素と言う.

[9] $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の C^2 級関数とし, $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上の関数 $g: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (r > 0, \theta \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき,

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \Delta_S g(r, \theta)$$

が成り立つことを証明せよ.

- 10 (Cauchy-Riemann 方程式) $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow V, g: V \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ U, V 上の C^2 級関数とすると, f が

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \quad (x \in U)$$

を満たせば,

$$\Delta(g \circ f)(x) = \Delta g(f(x)) |f'_1(x)|^2 \quad (x \in U),$$

$$\Delta(g \circ f)(x) = \Delta g(f(x)) |f'_2(x)|^2 \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

- 11 (波動方程式) $c > 0, u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数とすると, u が

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たせば, u は $x - ct$ の関数 (進行波) と $x + ct$ の関数 (後退波) の和である. つまり,

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たす $\mathbb{R}$ 上の C^2 級関数 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在することを証明せよ.

- 12 (Lorentz 変換) $0 < v < c, \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数とすると, φ が

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たせば,

$$\psi(\xi, \tau) = \varphi(x, t), \quad \begin{pmatrix} \xi \\ c\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad ((\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義される $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}(\xi, \tau) = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}(\xi, \tau)$$

を満たすことを証明せよ.

- 13 $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^n 級関数とすると, f が

$$f(ax) = a^m f(x) \quad (a > 0, x \in \mathbb{R}^2)$$

を満たせば,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_1^{n-k} x_2^k \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n-k} \partial x_2^k}(x) = m(m-1) \cdots (m-n+1) f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つことを証明せよ.

3.2 Taylor の定理と関数の極大・極小

• 双線型形式, 2 次形式

[1] $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) A の任意の固有値は実数である.

(2) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ を A の固有値とし,

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2b}{a-c}$$

とおくと,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

[2] $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ とし, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $Q_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$Q_A(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義する. このとき, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ を A の固有値とし,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2b}{a-c}$$

とおくと,

$$Q_A(x, y) = \lambda u^2 + \mu v^2$$

が成り立つことを証明せよ.

[3] $A \in S_2(\mathbb{R})$ とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) A は正値である.

(ii) A の任意の固有値は正である.

[4] $A \in S_2(\mathbb{R})$ とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) A は負値である.

(ii) A の任意の固有値は負である.

● Hesse 行列と関数の極大・極小

5 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数とし, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(u, v) = f(x, y), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ. ただし, I は 2 次単位行列を表す.

(1) $H_g(u, v) = {}^t A H_f(x, y) A$.

(2) (Laplace 作用素の合同変換不変性) $A^t A = I = {}^t A A$ ならば, $\Delta f(x, y) = \Delta g(u, v)$.

6 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + y^3 - 12x - 6y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が極大, 極小, 鞍となる点をそれぞれ求めよ.

7 (指定演習問題 4) $a > 0$ とするとき, 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - a^2) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が極大, 極小, 鞍となる点をそれぞれ求めよ.

8 $0 < a < b$ とするとき, 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + y^2}^3 - \frac{1}{2}(a + b)(x^2 + y^2) + ab\sqrt{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が極大, 極小, 鞍となる点をそれぞれ求めよ.

9 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が極大, 極小, 鞍となる点をそれぞれ求めよ.

10 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = (xy + x + y - 1)e^{-(x+y)} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

が極大, 極小, 鞍となる点をそれぞれ求めよ.

3.3 陰関数定理と関数の条件付き極値

● 陰関数定理, 逆関数定理

1 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2y^3 + x - 2y + 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x, \varphi(x)) = 0$ によって定義される 1 のある開近傍 $U \subseteq \mathbb{R}$ 上の関数 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ が存在することを証明せよ.
- (2) $\varphi(1), \varphi'(1)$ の値をそれぞれ求めよ.

2 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = 2x^3 - y^3 + x^2 - 4xy + y^2 + 4 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x, \varphi(x)) = 0$ によって定義される 0 のある開近傍 $U \subseteq \mathbb{R}$ 上の関数 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ が存在することを証明せよ.
- (2) $\varphi(0), \varphi'(0)$ の値をそれぞれ求めよ.

3 $U, V \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の開集合, $a \in U, b \in V, f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を $U \times V$ 上の C^3 級関数とすると,

$$f(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

ならば, $f(x, \varphi(x)) = 0$ によって定義される a のある開近傍 $U' \subseteq U$ 上の C^3 級関数 $\varphi: U' \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\varphi'(x)$ を $f_x(x, \varphi(x)), f_y(x, \varphi(x))$ で表せ.
- (2) $\varphi''(x)$ を $f_x(x, \varphi(x)), f_y(x, \varphi(x)), f_{xx}(x, \varphi(x)), f_{xy}(x, \varphi(x)), f_{yy}(x, \varphi(x))$ で表せ.
- (3) φ を

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + o((x - a)^2) \quad (x \rightarrow a)$$

で近似せよ.

4 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = x^3 + 2y^3 - 6xy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x, \varphi(x)) = 0$ によって定義される 2 のある開近傍 $U \subseteq \mathbb{R}$ 上の関数 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ が存在することを証明せよ.
- (2) φ が極大, 極小となる点をそれぞれ求めよ.

5 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy^2 + 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x, \varphi(x)) = 0$ によって定義される 1 のある開近傍 $U \subseteq \mathbb{R}$ 上の関数 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ が存在することを証明せよ.

(2) φ が極大, 極小となる点をそれぞれ求めよ.

6 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の C^1 級関数とする. $C = \{(x, y) \in U; f(x, y) = 0\}$ とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) $f'(a, b) \neq 0$ を満たす任意の $(a, b) \in C$ に対し, C の (a, b) での接線 T は

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0\}$$

である.

(2) $f'(a, b) \neq 0$ を満たす任意の $(a, b) \in C$ に対し, C の (a, b) での法線 N は

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f_y(a, b)(x - a) - f_x(a, b)(y - b) = 0\}$$

である.

7 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の C^1 級関数とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) (Barrow の公式) $[a, b] = \{(1 - t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U$ を満たす任意の $a, b \in U$ に対して

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 J_f((1 - t)a + tb)(b - a)dt$$

が成り立つ.

(2) (有限増分の定理) $[a, b] \subseteq U$ を満たす任意の $a, b \in U$ に対して

$$|f(b) - f(a)| \leq \max_{x \in [a, b]} |J_f(x)| |b - a|$$

が成り立つ.

8 (逆関数定理) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の C^n 級関数とするとき, f が U から $\mathbb{R}^2$ への単射であり, かつ

$$\forall x \in U, \det f'(x) \neq 0$$

ならば, 次の (i) を満たす $\mathbb{R}^2$ の開集合 $V \subseteq \mathbb{R}^2$ と次の (ii) を満たす V 上の C^n 級関数 $g: V \rightarrow U$ が存在することを証明せよ.

(i) $f(U) = V$.

(ii) $g = f^{-1}$.

さらに,

$$g'(f(x)) = f'(x)^{-1} \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

● Lagrange の乗数法と関数の条件付き極値

- [9] $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \right\}$ とおくとき, 次の C 上の関数

$$f(x, y) = x - y \quad ((x, y) \in C)$$

の C での最大値・最小値が存在することを証明し, f が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

- [10] $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \right\}$ とおくとき, 次の C 上の関数

$$f(x, y) = xy \quad ((x, y) \in C)$$

の C での最大値・最小値が存在することを証明し, f が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

- [11] (指定演習問題 5) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - xy + y^2 = 3\}$ とおくとき, 次の C 上の関数

$$f(x, y) = x - y \quad ((x, y) \in C)$$

の C での最大値・最小値が存在することを証明し, f が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

- [12] $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 3\}$ とおくとき, 次の C 上の関数

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 \quad ((x, y) \in C)$$

の C での最大値・最小値が存在することを証明し, f が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

- [13] $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 6\}$ とおくとき, 次の C 上の関数

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y \quad ((x, y) \in C)$$

の C での最大値・最小値が存在することを証明し, f が最大, 最小となる点をそれぞれ求めよ.

- [14] $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x^3 + 5x^2 - y^2 = 0\}$ とおくとき, 次の C 上の関数

$$f(x, y) = xy \quad ((x, y) \in C)$$

が極大, 極小となる点をそれぞれ求めよ.

- [15] (エントロピー) $C = \{(x, y) \in (0, \infty)^2 ; x + y = 1\}$ とおくとき, 次の C 上の関数

$$f(x, y) = x \log \frac{1}{x} + y \log \frac{1}{y} \quad ((x, y) \in C)$$

の C での最大値が存在することを証明し, f が最大となる点を求めよ.

- [16] $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ とし, $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; ax + by + c = 0\}$ とおくとき, (x_0, y_0) と L の距離 d は

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

であることを証明せよ.

- 17 $a, b > 0$ とし, $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ とおくとき, E に内接する長方形の中から, 面積が最大の長方形とその面積を求めよ.
- 18 (等周問題) 周の長さが $l > 0$ の長方形の中から, 面積が最大の長方形とその面積を求めよ.
- 19 (効用最大化問題) 消費財 A, B の価格をそれぞれ $a > 0, b > 0$ とする. A, B の消費量がそれぞれ $x \geq 0, y \geq 0$ ならば, 消費者は効用 $u(x, y) \geq 0$ を得るとき, 次の問いに答えよ.
- (1) 消費者の支出を 1 とするとき, Lagrange の乗数法を用いて消費者の得る効用 $u(x, y)$ が最大となる消費量 (x, y) を求める問題を定式化せよ.
 - (2) (Cobb-Douglas 型関数) $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, u(x, y) = x^\alpha y^\beta$ のとき, (1) を解け.
- 20 (費用最小化問題) 消費財 A, B の価格をそれぞれ $a > 0, b > 0$ とする. A, B の消費量がそれぞれ $x \geq 0, y \geq 0$ ならば, 消費者は効用 $u(x, y) \geq 0$ を得るとき, 次の問いに答えよ.
- (1) 消費者の得る効用 $u(x, y)$ を 1 とするとき, Lagrange の乗数法を用いて消費者の支出が最小となる消費量 (x, y) を求める問題を定式化せよ.
 - (2) (Cobb-Douglas 型関数) $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1, u(x, y) = x^\alpha y^\beta$ のとき, (1) を解け.

第4章 多変数関数の積分法

4.1 有界閉区間での多重積分

● 累次積分

[1] 次の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_{[0,a] \times [0,b]} ye^{xy} dx dy \quad (a, b > 0).$$

$$(2) \iint_{[a,b] \times [0,1]} y^x dx dy \quad (-1 < a < b).$$

[2] 次の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_{[0,a] \times [0,b]} xy \sin(x^2 + y^2) dx dy \quad (a, b > 0).$$

$$(2) \iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0,2]} x^2 y \sin(xy^2) dx dy.$$

[3] 次の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_{[0, \sqrt{3}] \times [0,1]} \frac{x}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy.$$

$$(2) \iint_{[0,1] \times [0, \sqrt{3}]} \frac{y}{1+x^2+y^2} dx dy.$$

[4] $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ ($i \in \{1, 2\}$) とし, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数で, 任意の $a_1 \leq x_1 \leq b_1$ に対し, f_{x_1} が $[a_2, b_2]$ で可積分であるものとする. $[a_1, b_1]$ 上の関数 $F: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \quad (a_1 \leq x_1 \leq b_1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) f が I で連続ならば, F は $[a_1, b_1]$ で連続である.

(2) f が I で連続かつ x_1 について偏微分可能であり, かつ $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ が I で連続ならば, F は $[a_1, b_1]$ で C^1 級であり,

$$F'(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_2 \quad (a_1 \leq x_1 \leq b_1)$$

が成り立つ.

□5 (Frullani 積分) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $(0, \infty)$ 上の C^1 級関数とすると,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \beta$$

となる $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在すれば, 任意の $0 < a < b$ に対して

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = (\beta - \alpha) \log \frac{b}{a}$$

が成り立つことを証明せよ.

4.2 一般の集合での多重積分

● 面積

[1] $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とすると、次の等式を証明せよ。

$$(1) \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}.$$

$$(2) \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B.$$

$$(3) \chi_{A \setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B).$$

$$(4) \chi_{A \Delta B} = |\chi_A - \chi_B|. \text{ ただし, } A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

[2] $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とすると、

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2; \chi_A \text{ は } x \text{ で連続でない}\}$$

が成り立つことを証明せよ。

[3] (指定演習問題 6) $a, b > 0$ とし、 $T \subseteq \mathbb{R}^2$ を $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) を頂点とする閉三角形とすると、次の問いに答えよ。ただし、 $\sharp(*)$ は $*$ の元の個数を表す。

(1) $K = [0, a] \times [0, b]$ とし、 $\Delta \in \mathcal{D}(K)$ を

$$\Delta = \left\{ \left(\frac{k_1}{n}a, \frac{k_2}{n}b \right) ; (k_1, k_2) \in \{0, 1, \dots, n\}^2 \right\}$$

によって定義する。 $\underline{K} = \{(k_1, k_2); I_{(k_1, k_2)} \subseteq T\}$, $\overline{K} = \{(k_1, k_2); I_{(k_1, k_2)} \cap T^i \neq \emptyset\}$ とおくと、 $\sharp(\underline{K})$, $\sharp(\overline{K})$ を求めよ。

(2) T が面積確定であることを証明し、 T の面積を求めよ。

[4] $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ とし、 $A = \mathbb{Q}^2 \cap ([a, b] \times [c, d])$ とおくと、次のことを証明せよ。

$$(1) A = (\mathbb{Q} \cap [a, b]) \times (\mathbb{Q} \cap [c, d]).$$

(2) A は面積確定でない。

[5] $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とすると、次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ。

(i) A は面積確定である。

(ii) ∂A は面積零である。

[6] $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とすると、 A が面積確定ならば、 A^i , $\overline{A}$ は面積確定であり、

$$a(A^i) = a(A) = a(\overline{A})$$

が成り立つことを証明せよ。

● 可積分関数と多重積分

- [7] $N \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界集合, $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ を N 上の有界関数とすると, N が面積零ならば, f は N で可積分であり,

$$\iint_N f(x) dx = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

- [8] $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の有界集合, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の有界関数とし, $N = \{x \in A ; f(x) \neq g(x)\}$ とおくと, N が面積零ならば, 次の (i), (ii) は同値であることを証明せよ.

(i) f は A で可積分である.

(ii) g は A で可積分である.

さらに, (i) または (ii) を満たせば,

$$\iint_A f(x) dx = \iint_A g(x) dx$$

が成り立つことを証明せよ.

● 累次積分

9 次の二重積分の値を求めよ.

(1) $\iint_A \frac{y \sin x}{x} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq y \leq x \leq \pi\}.$

(2) $\iint_A \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq \sqrt{3}, 0 \leq y \leq x^2\}.$

10 次の二重積分の値を求めよ.

(1) $\iint_A e^{\frac{y}{x}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}.$

(2) $\iint_A x e^{y^2} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, x^2 \leq y \leq 4\}.$

11 次の二重積分の値を求めよ.

(1) $\iint_A \sqrt{xy} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq y^2, x^2 \leq y\}.$

(2) $\iint_A \sqrt{x^2 + y} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 \leq y \leq 2a^2 - x^2\} (a > 0).$

12 次の二重積分の値を求めよ.

(1) $\iint_A xy dx dy, A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} (a, b > 0).$

(2) $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy, A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} (a, b > 0).$

13 次の累次積分の積分順序を交換せよ.

(1) $\int_a^b \left(\int_a^x f(x, y) dy \right) dx \quad (0 < a < b).$

(2) $\int_a^b \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx \quad (0 < a < b).$

14 次の累次積分の積分順序を交換せよ.

(1) $\int_0^a \left(\int_{x-a}^{-x+a} f(x, y) dy \right) dx \quad (a > 0).$

(2) $\int_{-a}^a \left(\int_{x^2-a^2}^{-x^2+a^2} f(x, y) dy \right) dx \quad (a > 0).$

15 次の累次積分の積分順序を交換せよ.

(1) $\int_0^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx \quad (a > 0).$

(2) $\int_0^a \left(\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+a} f(x, y) dy \right) dx \quad (a > 0).$

16 次の累次積分の積分順序を交換せよ.

$$(1) \int_0^a \left(\int_y^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x,y) dx \right) dy \quad (a > 0).$$

$$(2) \int_0^{2a} \left(\int_{\sqrt{2ay-y^2}}^{\sqrt{4a^2-y^2}} f(x,y) dx \right) dy \quad (a > 0).$$

4.3 変数変換公式

• アフィン写像と多重積分

[1] $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とし, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) φ の Jacobi 行列とその行列式を求めよ.

(2) φ が $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への全単射であるための A の必要十分条件を求めよ.

[2] $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$ とし, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (u, v) \in [0, 1]^2, (x, y) = (au + bv, cu + dv)\}$ とおくと, 次の問いに答えよ.

(1) $a, b, c, d > 0$ のとき, A の概形を図示せよ.

(2) A の面積を求めよ.

[3] 次の二重積分の値を求めよ.

(1) $\iint_A (x^2 - y^2)^2 dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x - y| \leq a, |x + y| \leq b\}$ ($a, b > 0$).

(2) $\iint_A \frac{\log(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x - y \leq a, 1 \leq x + y \leq b\}$ ($a, b > 1$).

[4] (指定演習問題 7) 次の二重積分の値を求めよ.

(1) $\iint_A (x^2 - y^2)e^{xy} dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x - y \leq a, 0 \leq x + y \leq b\}$ ($a, b > 0$).

(2) $\iint_A (x - y)^2 \sin(x^2 - y^2) dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x - y \leq \pi, 0 \leq x + y \leq 1\}$.

[5] 次の二重積分の値を求めよ.

(1) $\iint_A (x - y)^\alpha (x + y)^\beta dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ ($\alpha, \beta > 0$).

(2) $\iint_A (x - y)^\alpha (x + y) dx dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ ($\alpha > 0$).

● 微分同相写像と多重積分

[6] 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数 φ の Jacobi 行列とその行列式を求めよ.

$$(1) \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ 2uv \end{pmatrix}.$$

$$(3) \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u(1-v) \\ uv \end{pmatrix}.$$

$$(4) \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u(1-v) \\ u(1+v) \end{pmatrix}.$$

[7] $0 < a < b$, $0 < c < d$ とし, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; ax \leq y \leq bx, c \leq xy \leq d\}$ とおくととき, 次の問いに答えよ.

(1) A の概形を図示せよ.

(2) A の面積を求めよ.

[8] 次の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_A \log(x^2 + y^2) dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\} \ (0 < a < b).$$

$$(2) \iint_A \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq a^2\} \ (a > 0).$$

[9] 次の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_A (x^2 + y^2) dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq c^2\} \ (a, b \in \mathbb{R}, c > 0).$$

$$(2) \iint_A \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq ax\} \ (a > 0).$$

[10] 次の二重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_A xy dx dy, A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 1 \right\} \ (a, b > 0).$$

$$(2) \iint_A xy dx dy, A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{4}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{4}} \leq 1 \right\} \ (a, b > 0).$$

4.4 広義多重積分

• コンパクト近似列

定義. $d \in \{1, 2\}$, $a \in \mathbb{R}^d$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする. 任意の $r > 0$ に対して

$$B_r(a) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

のとき, a を A の**集積点**と言う.

[1] $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

- (i) A は **Bolzano-Weierstrass** である. つまり, A の任意の無限部分集合 $B \subseteq A$ に対し, B のある集積点が存在する.
- (ii) A は点列コンパクトである.

[2] $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

- (i) A は**全有界**である. つまり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\mathbb{R}^d$ のある有限点列 $\{x_1, \dots, x_n\}$ が存在し,

$$A \subseteq B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_n)$$

が成り立つ.

- (ii) A は有界である.

定義. $d \in \{1, 2\}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^d$ の開集合族, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする.

$$A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

のとき, $\mathcal{U}$ を A の**開被覆**と言う.

[3] $d \in \{1, 2\}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

- (i) A は **Heine-Borel** である. つまり, A の任意の開被覆 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$ に対して $\mathcal{U}$ のある有限集合列 $\{U_1, \dots, U_n\}$ が存在し,

$$A \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$$

が成り立つ.

- (ii) A はコンパクトである.

[4] $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とし, $\mathcal{K}(A)$ の集合列 $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が次の (i), (ii) を満たすとする.

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, K_n \subseteq K_{n+1}^i$.
- (ii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = A$.

このとき, 任意の $K \in \mathcal{K}(A)$ に対し, $K \subseteq K_n$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在することを証明せよ.

● 非負値関数の広義多重積分

[5] (指定演習問題 8) 次の広義二重積分が収束することを証明し, その値を求めよ.

$$(1) \iint_A \frac{1}{(1+x^2+y)^2} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, 0 \leq y \leq 2x\}.$$

$$(2) \iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x \leq 1, -x < y < x\}.$$

[6] $a > 0, b, c \in \mathbb{R}, ac - b^2 > 0$ とするとき, 次の広義二重積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy$$

が収束することを証明し,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy = \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$$

が成り立つことも証明せよ.

[7] 次の広義二重積分が収束することを証明し, その値を求めよ.

$$(1) \iint_A e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 0 < x+y \leq 2\}.$$

$$(2) \iint_A \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-y}{x+y}\right) dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 0 < x+y \leq 1\}.$$

[8] (Dirichlet 積分) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, x+y < 1\}$ とおくとき, 次の広義二重積分

$$I(a, b, c) = \iint_A x^{a-1} y^{b-1} (1-x-y)^{c-1} dx dy \quad (a, b, c > 0)$$

が収束することを証明し,

$$I(a, b, c) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} \quad (a, b, c > 0)$$

が成り立つことも証明せよ.

[9] 次の広義二重積分が収束するか否かを判定し, 収束すれば, その値を求めよ.

$$(1) \iint_{[a, \infty) \times [b, \infty)} \frac{1}{(x+y)^\alpha} dx dy \quad (a, b > 0, \alpha > 0).$$

$$(2) \iint_{(0, a] \times (0, b]} \frac{1}{(x+y)^\alpha} dx dy \quad (a, b > 0, \alpha > 0).$$

[10] 次の広義二重積分が収束するか否かを判定し, 収束すれば, その値を求めよ.

$$(1) \iint_A \frac{1}{(x-y)^\alpha} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x \leq 1, 0 \leq y < x\} \quad (\alpha > 0).$$

$$(2) \iint_A \frac{x^\alpha}{x^2+y^2} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq ax\} \quad (a > 0, 0 < \alpha < 2).$$

[11] 次の広義二重積分が収束するか否かを判定し, 収束すれば, その値を求めよ.

(1) $\iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \geq a^2\} (a > 0, \alpha > 0).$

(2) $\iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x^2 + y^2 \leq a^2\} (a > 0, \alpha > 0).$

[12] 次の広義二重積分が収束するか否かを判定し, 収束すれば, その値を求めよ.

(1) $\iint_A \frac{\log(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \geq a^2\} (a > 0, \alpha > 0).$

(2) $\iint_A \frac{1}{(a^2 - x^2 - y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 < a^2\} (a > 0, \alpha > 0).$

● 一般の関数の広義多重積分

13 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の部分集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

- (i) 任意の $K \in \mathcal{K}(A)$ に対して $f^\pm$ は K で可積分である.
- (ii) $|f| \leq g$ を満たす A 上の非負値広義可積分関数 $g: A \rightarrow [0, \infty)$ が存在する.

このとき, f は A で広義可積分であり,

$$\iint_A |f(x)| dx \leq \iint_A g(x) dx$$

が成り立つことを証明せよ.

14 $A = [0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}$ とし, A 上の関数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad ((x, y) \in A)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $f^\pm$ を求めよ.

(2) 次の数列

$$I_n^+ = \iint_{[\frac{1}{n}, 1] \times [0, 1]} f^+(x, y) dx dy \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

の一般項を求めよ.

(3) 次の数列

$$I_n^- = \iint_{[\frac{1}{n}, 1] \times [0, 1]} f^-(x, y) dx dy \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

の一般項を求めよ.

(4) f が A で広義可積分でないことを証明せよ.

第5章 ベクトル場の微積分法

5.1 ベクトル場とその微分

● ベクトル場の微分

- [1] $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の全微分可能スカラー場とすると,

$$\operatorname{grad}(fg)(x) = \operatorname{grad}f(x)g(x) + f(x)\operatorname{grad}g(x) \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

- [2] $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の全微分可能スカラー場, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の全微分可能ベクトル場とすると,

$$\operatorname{rot}(fg)(x) = \operatorname{grad}f(x) \times g(x) + f(x)\operatorname{rot}g(x) \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

- [3] $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の全微分可能スカラー場, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を U 上の全微分可能ベクトル場とすると,

$$\operatorname{div}(fg)(x) = \operatorname{grad}f(x) \cdot g(x) + f(x)\operatorname{div}g(x) \quad (x \in U)$$

が成り立つことを証明せよ.

- [4] $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の全微分可能ベクトル場とし, $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$g(u, v) = Af(x, y), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ. ただし, I は 2 次単位行列を表す.

(1) $J_g(u, v) = AJ_f(x, y)B$.

(2) (発散の正則変換不変性) $AB = I = BA$ ならば, $\operatorname{div}f(x, y) = \operatorname{div}g(u, v)$.

5.2 線積分とその基本性質

● 線積分 I

1 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C xy d\sigma$, C は (a, c) と (b, d) を結ぶ線分 ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

(2) $\int_C xy d\sigma$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$ ($a, b \in \mathbb{R}, r > 0$).

2 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C x^2 d\sigma$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b, y = \log x\}$ ($0 < a < b$).

(2) $\int_C y^2 d\sigma$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2\}$ ($r > 0$).

3 (指定演習問題 9) 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C y d\sigma$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; c \leq y \leq d, y^2 = 4px\}$ ($c, d \in \mathbb{R}, c < d, p > 0$).

(2) $\int_C y d\sigma$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}\}$ ($r > 0$).

4 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C x d\sigma$, $C = \{(r(t - \sin t), r(1 - \cos t)) ; 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ($r > 0$).

(2) $\int_C y d\sigma$, $C = \{(r(t - \sin t), r(1 - \cos t)) ; 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ($r > 0$).

5 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} d\sigma$, C は $(1, \tan \theta)$ と $(1, \tan \varphi)$ を結ぶ線分 $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta, \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

(2) $\int_C \frac{x^2}{x^2 + y^2} d\sigma$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2\}$ ($r > 0$).

6 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C \frac{y}{x^2 + y^2} d\sigma$, C は $(1, \tan \theta)$ と $(1, \tan \varphi)$ を結ぶ線分 $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta, \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

(2) $\int_C \frac{y^2}{4x^2 + y^2} d\sigma$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; c \leq y \leq d, y^2 = 4px\}$ ($c, d \in \mathbb{R}, c < d, p > 0$).

7 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C \frac{1}{x - y} d\sigma$, C は $(0, -b)$ と $(a, 0)$ を結ぶ線分 ($a, b > 0$).

(2) $\int_C \frac{1}{x - y} d\sigma$, C は $(0, -b)$ と $(a, -b)$ と $(a, 0)$ を結ぶ折線 ($a, b > 0$).

- 8 (平均値) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の連続スカラー場とし, $\overline{B_r(x)} \subseteq U$ を満たす任意の $x \in U$, $r > 0$ に対して

$$\varphi(x, r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(x)} f(y) d\sigma, \quad \psi(x, r) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(x)} f(y) dy$$

とおくとき, 次のことを証明せよ.

- (1) 任意の $x \in U$ に対して $\lim_{r \rightarrow +0} \varphi(x, r) = f(x)$.
(2) $\overline{B_r(x)} \subseteq U$ を満たす任意の $x \in U$, $r > 0$ に対して

$$\psi(x, r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r \varphi(x, s) s ds$$

が成り立つ.

● 線積分 II

9 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C (x, y) \cdot (dx, dy)$, C は $(0, 0)$ と (a, b) を結ぶ線分 ($a, b \in \mathbb{R}$).

(2) $\int_C (x, y) \cdot (dx, dy)$, C は $(0, 0)$ と $(a, 0)$ と (a, b) を結ぶ折線 ($a, b \in \mathbb{R}$).

10 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C (-y, x) \cdot (dx, dy)$, C は (a, c) と (b, d) を結ぶ線分 ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

(2) $\int_C (-y, x) \cdot (dx, dy)$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; c \leq y \leq d, y^2 = 4px\}$ ($c, d \in \mathbb{R}, c < d, p > 0$).

11 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C (x^2 - y^2, 2xy) \cdot (dx, dy)$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0, x^2 + y^2 = r^2\}$ ($r > 0$).

(2) $\int_C (x^2 - y^2, 2xy) \cdot (dx, dy)$, $C = \{(r(1 - \cos t) \cos t, r(1 - \cos t) \sin t) ; 0 \leq t \leq \pi\}$ ($r > 0$).

12 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C (e^x \cos y, -e^x \sin y) \cdot (dx, dy)$, C は $(-a, 0)$ と $(0, b)$ と $(a, 0)$ を結ぶ折線 ($a, b \in \mathbb{R}$).

(2) $\int_C (e^x \cos y, -e^x \sin y) \cdot (dx, dy)$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \leq 0, x^2 + y^2 = r^2\}$ ($r > 0$).

13 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \cdot (dx, dy)$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2\}$ ($r > 0$).

(2) $\int_C \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \cdot (dx, dy)$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = r^2\}$ ($r > 0$).

14 $C \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の向き付けられた C^1 級曲線とし, 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$C(\theta) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C \right\}$$

とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $l(C(\theta)) = l(C)$.

(2) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{C(\theta)} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \cdot (dx, dy) = \int_C \left(-\frac{v}{u^2 + v^2}, \frac{u}{u^2 + v^2} \right) \cdot (du, dv)$$

が成り立つ.

● 線積分 III

15 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, C は $(1, \tan \theta)$ と $(1, \tan \varphi)$ を結ぶ線分 $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta, \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

(2) $\int_C \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0, x^2 + y^2 = r^2\} \ (r > 0)$.

16 次の線積分の値を求めよ.

(1) $\int_C \frac{y}{x^2 + y^2} dy$, C は $(1, \tan \theta)$ と $(1, \tan \varphi)$ を結ぶ線分 $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta, \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

(2) $\int_C \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; c \leq y \leq d, y^2 = 4px\} \ (c, d \in \mathbb{R}, c < d, p > 0)$.

5.3 Green の定理, Gauss の定理

• 区分的 C^1 級領域

- [1] (微分積分学の基本定理) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の微分可能関数で, $\forall x \in [a, b]$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ を満たすものとする.

$$c = \min_{a \leq x \leq b} \varphi(x), \quad d = \max_{a \leq x \leq b} \psi(x)$$

とおき, $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b] \times [c, d]$ 上の C^1 級関数とすると,

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つことを証明せよ.

● Green の定理

[2] $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とし, $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, $\operatorname{rot} f = 0$, $\operatorname{div} f = 0$ であるための A の必要十分条件をそれぞれ求めよ.

[3] $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{rot} f$ を求めよ.

(2) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $C \subseteq \mathbb{R}^2$ を $[a, b] \times [c, d]$ の周とするととき, 次の線積分

$$\int_C f(x, y) \cdot (dx, dy)$$

の値を求めよ.

[4] $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = (e^x \cos y, -e^x \sin y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{rot} f$ を求めよ.

(2) $C \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた区分的 C^1 級単純閉曲線とするととき, 次の線積分

$$\int_C f(x, y) \cdot (dx, dy)$$

の値を求めよ.

[5] $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ とし, D 上のベクトル場 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = \left(\log \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right) \quad ((x, y) \in D)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{rot} f$ を求めよ.

(2) $0 < a < b$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $C \subseteq \mathbb{R}^2$ を $[a, b] \times [c, d]$ の周とするととき, 次の線積分

$$\int_C f(x, y) \cdot (dx, dy)$$

の値を求めよ.

□6 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上のベクトル場 $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0))$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{rot} f$ を求めよ.

(2) $C \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の向き付けられた区分的 C^1 級単純閉曲線とすると, 次の線積分

$$\int_C f(x, y) \cdot (dx, dy)$$

の値を求めよ.

□7 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上のベクトル場 $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0))$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{rot} f$ を求めよ.

(2) $C \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の向き付けられた区分的 C^1 級単純閉曲線とすると, 次の線積分

$$\int_C f(x, y) \cdot (dx, dy)$$

の値を求めよ.

□8 (スーパー楕円) $a, b > 0$ とし, $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} < 1 \right\}$ とおくと, 次の問いに答えよ.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) D の面積を求めよ.

□9 (スーパー楕円) $a, b > 0$ とし, $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{4}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{4}} < 1 \right\}$ とおくと, 次の問いに答えよ.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) D の面積を求めよ.

● Gauss の定理

- [10] (転置) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$ とおく. $A \in M_2(\mathbb{R})$, $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場とすると,

$$\int_C Af(x) \cdot dx = \int_C f \cdot {}^t A \tau(x) d\sigma$$

が成り立つことを証明せよ.

- [11] (Green の公式) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の区分的 C^1 級有界領域, $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\bar{D}$ 上の C^2 級スカラー場とすると,

$$\iint_D \Delta f(x) dx = \int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) d\sigma$$

が成り立つことを証明せよ.

- [12] (Green の公式) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の区分的 C^1 級有界領域, $f, g : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\bar{D}$ 上の C^2 級スカラー場とすると,

$$\iint_D (f(x)\Delta g(x) - \Delta f(x)g(x)) dx = \int_{\partial D} \left(f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) g(x) \right) d\sigma$$

が成り立つことを証明せよ.

- [13] (Green の公式) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の区分的 C^1 級有界領域, $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\bar{D}$ 上の C^2 級スカラー場とする. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の関数 $E : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|} \quad (x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0)$$

によって定義するとき,

$$f(x) = - \iint_D E(x-y) \Delta f(y) dy + \int_{\partial D} \left(E(x-y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial E}{\partial \nu}(x-y) f(y) \right) d\sigma \quad (x \in D)$$

が成り立つことを証明せよ.

- [14] (平均値) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の C^2 級スカラー場とし, $\overline{B_r(x)} \subseteq U$ を満たす任意の $x \in U$, $r > 0$ に対して

$$\varphi(x, r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(x)} f(y) d\sigma$$

とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $x \in U$ に対して $\lim_{r \rightarrow +0} \varphi(x, r) = f(x)$.

(2) $\overline{B_r(x)} \subseteq U$ を満たす任意の $x \in U$, $r > 0$ に対して

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x, r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{B_r(x)} \Delta f(y) dy$$

が成り立つ.

- 15 (平均値の定理) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の C^2 級スカラー場とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $-\Delta f \leq 0$. つまり, $\forall x \in U, -\Delta f(x) \leq 0$.

(ii) $\overline{B_r(x)} \subseteq U$ を満たす任意の $x \in U, r > 0$ に対して

$$f(x) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(x)} f(y) d\sigma$$

が成り立つ.

- 16 (平均値の定理) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ を U 上の C^2 級スカラー場とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $-\Delta f \geq 0$. つまり, $\forall x \in U, -\Delta f(x) \geq 0$.

(ii) $\overline{B_r(x)} \subseteq U$ を満たす任意の $x \in U, r > 0$ に対して

$$f(x) \geq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(x)} f(y) d\sigma$$

が成り立つ.

5.4 スカラー・ポテンシャル

● スカラー・ポテンシャルの存在条件

- [1] $a, b \in \mathbb{R}, a < b, x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^2 級曲線とし, $C = \{x(t) ; a \leq t \leq b\}$, $v = |x'|$ とおく. $m > 0, f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C 上の連続ベクトル場とすると, 次のことを証明せよ.

(1) (Newton の運動方程式) f が

$$f(x(t)) = mx''(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

を満たせば,

$$\int_C f(x) \cdot dx = \frac{1}{2}mv(b)^2 - \frac{1}{2}mv(a)^2$$

が成り立つ.

(2) (保存力場) $f = -\text{grad}\varphi$ を満たす C 上の C^1 級スカラー場 $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}$ が存在すれば,

$$\int_C f(x) \cdot dx = \varphi(x(b)) - \varphi(x(a))$$

が成り立つ.

(3) (力学的エネルギー保存則) $[a, b]$ 上のスカラー場 $E : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$E(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + f(x(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

によって定義するとき, f が (1), (2) を満たせば, $E(a) = E(b)$ が成り立つ.

- [2] $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上のベクトル場 $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0))$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\text{rot} f$ を求めよ.

(2) f のスカラー・ポテンシャルが存在するか否かを判定し, 存在すれば, それを一つ求めよ.

- [3] $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上のベクトル場 $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0))$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\text{rot} f$ を求めよ.

(2) f のスカラー・ポテンシャルが存在するか否かを判定し, 存在すれば, それを一つ求めよ.

● Poincaré の補題

- [4] (指定演習問題 10) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ のホモトープな単連結領域, $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ を D 上の C^2 級関数とするとき, u が D で調和ならば, つまり,

$$\Delta u = 0$$

を満たせば, 次の (i), (ii) を満たす D 上の C^2 級関数 $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在することを証明せよ.

- (i) (Cauchy-Riemann 方程式) u, v は D で

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

を満たす.

- (ii) v は D で調和である.

【補足】 v を u の共役調和関数と言う.

- [5] $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1) u が $\mathbb{R}^2$ で調和であることを証明し, u の共役調和関数 $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を一つ求めよ.
- (2) (u, v) のスカラー・ポテンシャルが存在するか否かを判定し, 存在すれば, それを一つ求めよ.

- [6] $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1) u が $\mathbb{R}^2$ で調和であることを証明し, u の共役調和関数 $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を一つ求めよ.
- (2) (u, v) のスカラー・ポテンシャルが存在するか否かを判定し, 存在すれば, それを一つ求めよ.

- [7] $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0\}$ とし, D 上の関数 $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \in D)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1) u が D で調和であることを証明し, u の共役調和関数 $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ を一つ求めよ.
- (2) (u, v) のスカラー・ポテンシャルが存在するか否かを判定し, 存在すれば, それを一つ求めよ.

関連図書

- [1] 齋藤 正彦, 微分積分学, 東京図書, 2006 年.
- [2] 杉浦 光夫, 解析入門 I(基礎数学), 東京大学出版会, 1980 年.
- [3] 杉浦 光夫, 解析入門 II(基礎数学), 東京大学出版会, 1985 年.