微分積分学II 講義ノート

柿澤 亮平

島根大学学術研究院 教育学系 数学科教育専攻

目 次

第 1 章　積分と可積分条件

1.1　積分と Darboux の可積分条件

• 積分

定義 1.1.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする.

(1) $\Delta = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ が $[a, b]$ の**分割**であるとは, Δ が

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

を満たすことを言う. また, $[a, b]$ の分割全体の集合を

$$\mathcal{D}([a, b]) = \{\Delta = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}\ ;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

と書く.

(2) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対し,

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \quad (k \in \{1, \cdots, n\})$$

を $[a, b]$ の Δ による**小区間**と言う. さらに,

$$d(I_k) = x_k - x_{k-1} \quad (k \in \{1, \cdots, n\})$$

を I_k の**直径**と言い,

$$d(\Delta) = \max_{k \in \{1, \cdots, n\}} d(I_k)$$

を Δ の**幅**と言う.

(3) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対し, $\xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ が Δ の**代表点系**であるとは, ξ が

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1, \quad \cdots, \quad x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n$$

を満たすことを言う. また, Δ の代表点系全体の集合を

$$\mathcal{X}(\Delta) = \{\xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}\ ;\ x_0 \leq \xi_1 \leq x_1,\ \cdots,\ x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n\}$$

と書く.

(4) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対し,

$$S(f; \Delta, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (\xi \in \mathcal{X}(\Delta))$$

によって定義される $S(f; \Delta, *) : \mathcal{X}(\Delta) \to \mathbb{R}$ を f の Δ による **Riemann 和**と言う.

定義 1.1.2 (ε-δ 論法)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上の有界関数とする．$d(\Delta) \to +0$ のとき，$S(f; \Delta, *)$ が $R \in \mathbb{R}$ に $[a,b]$ で**一様収束**するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し，$d(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ に対して

$$\sup_{\xi \in \mathcal{X}(\Delta)} |S(f; \Delta, \xi) - R| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う．このとき，$\displaystyle\lim_{d(\Delta) \to +0} S(f; \Delta, *) = R$ と書く．

定義 1.1.2 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b]),\ \left(d(\Delta) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{\xi \in \mathcal{X}(\Delta)} |S(f; \Delta, \xi) - R| < \varepsilon \right).$$

定義 1.1.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上の有界関数とする．f が $[a,b]$ で**可積分**であるとは，

$$\lim_{d(\Delta) \to +0} S(f; \Delta, *) = R$$

となる $R \in \mathbb{R}$ が存在することを言う．このとき，

$$R = \int_{[a,b]} f(x)dx$$

と書き，$\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)dx$ を f の $[a,b]$ での**積分**と言う．

注意. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし，$I = [a,b]$ とおくと，1 は I で可積分であり，

$$\int_I 1dx = b - a$$

が成り立つ．これより，

$$b - a = l(I)$$

と書き，$l(I)$ を I の**長さ**と言う．

定義 1.1.4. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間，$f : I \to \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする．任意の $a, b \in I$, $a \neq b$ に対し，f が $\{(1-t)a + tb\ ;\ 0 \leq t \leq 1\}$ で可積分のとき，

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f(x)dx & (a < b), \\ \displaystyle -\int_{[b,a]} f(x)dx & (a > b) \end{cases}$$

を f の $[a,b]$ または $[b,a]$ での**定積分**と言う．

• 上積分・下積分

定義 1.1.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする．任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対し，

$$\overline{S}(f; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}), \quad \underline{S}(f; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

をそれぞれ f の Δ による **Riemann 上限和**, **Riemann 下限和**と言う．

命題 1.1.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする．

(1) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\inf_{a \le x \le b} f(x)(b - a) \le \underline{S}(f; \Delta) \le \overline{S}(f; \Delta) \le \sup_{a \le x \le b} f(x)(b - a)$$

が成り立つ．

(2) $\Delta \subseteq \Delta'$ を満たす任意の $\Delta, \Delta' \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\underline{S}(f; \Delta) \le \underline{S}(f; \Delta'), \quad \overline{S}(f; \Delta) \ge \overline{S}(f; \Delta')$$

が成り立つ．

証明．省略 (講義の自筆ノート)． □

定義 1.1.6. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする．

$$\overline{S}(f) = \inf_{\Delta \in \mathcal{D}([a,b])} \overline{S}(f; \Delta), \quad \underline{S}(f) = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}([a,b])} \underline{S}(f; \Delta)$$

をそれぞれ f の $[a, b]$ での**上積分**, **下積分**と言う．

命題 1.1.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする．

(1) 任意の $\Delta, \Delta' \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\underline{S}(f; \Delta) \le \overline{S}(f; \Delta')$$

が成り立つ．

(2) $\underline{S}(f) \le \overline{S}(f)$.

証明．省略 (講義の自筆ノート)． □

• Darboux の可積分条件

補題 1.1.1 (はさみうちの原理)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上の有界関数とする. $d(\Delta) \to +0$ のとき, $\underline{S}(f;\Delta)$, $\overline{S}(f;\Delta)$ が $[a,b]$ で一様収束し, かつ $\lim_{d(\Delta)\to+0} \underline{S}(f;\Delta) = \lim_{d(\Delta)\to+0} \overline{S}(f;\Delta)$ ならば, f は $[a,b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Delta)\to+0} \underline{S}(f;\Delta) = \lim_{d(\Delta)\to+0} \overline{S}(f;\Delta)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 1.1.1 (Darboux の定理)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上の有界関数とすると,

$$\lim_{d(\Delta)\to+0} \underline{S}(f;\Delta) = \underline{S}(f), \qquad \lim_{d(\Delta)\to+0} \overline{S}(f;\Delta) = \overline{S}(f)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 1.1.2 (Darboux の可積分条件)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上の有界関数とすると, 次の (i)–(iii) は互いに同値である.

(i) f は $[a,b]$ で可積分である.

(ii) $\lim_{d(\Delta)\to+0} (\overline{S}(f;\Delta) - \underline{S}(f;\Delta)) = 0$.

(iii) $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$.

さらに, f が (i)–(iii) のいずれか一つを満たせば,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• 区分求積法

命題 1.1.3 (区分求積法)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の可積分関数とすると,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.1.4.

(1) $x < y$ を満たす任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$x < r < y$$

を満たす $r \in \mathbb{Q}$ が存在する.

(2) $x < y$ を満たす任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$x < s < y$$

を満たす $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

例. (Dirichlet 関数) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

によって定義すると, $a, b \in \mathbb{Q}$ ならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n} = b - a$$

が成り立つが, f は $[a, b]$ で可積分でない.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

1.2　有界関数列の極限

● 関数空間

定義 1.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間とする. I 上関数全体の集合を

$$F(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$$

と書く.

定義 1.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間とする. I 上関数の**相等・加法・スカラー乗法**を

(1) (相等) $\forall f, g \in F(I)$, $(f = g \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) = g(x))$.

(2) (加法) $\forall f, g \in F(I)$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $(x \in I)$.

(3) (スカラー乗法) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall f \in F(I)$, $(af)(x) = af(x)$ $(x \in I)$.

によって定義する.

定義 1.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間とする. I 上関数の**零・逆**を

(1) (零) $0(x) = 0$ $(x \in I)$.

(2) (逆) $\forall f \in F(I)$, $(-f)(x) = -f(x)$ $(x \in I)$.

によって定義する.

命題 1.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間とすると, $F(I)$ は I 上関数の加法・スカラー乗法について**線型空間**である. つまり, 次の (i)–(viii) を満たす.

(i) $(f+g)+h = f+(g+h)$ $(f, g, h \in F(I))$.

(ii) $\exists! 0 \in F(I), \forall f \in F(I)$, $f + 0 = f = 0 + f$.

(iii) $\forall f \in F(I), \exists! -f \in F(I)$, $f + (-f) = 0 = (-f) + f$.

(iv) $f + g = g + f$ $(f, g \in F(I))$.

(v) $(ab)f = a(bf)$ $(a, b \in \mathbb{R},\ f \in F(I))$.

(vi) $1f = f$ $(f \in F(I))$.

(vii) $(a+b)f = af + bf$ $(a, b \in \mathbb{R},\ f \in F(I))$.

(viii) $a(f+g) = af + ag$ $(a \in \mathbb{R},\ f, g \in F(I))$.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

注意 (減法)**.** (iii) の $f + (-g)$ を $f - g$ と書く.

• 有界関数空間

定義 1.2.4. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間とする.

(1) I 上有界関数全体の集合を

$$R^\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\ ;\ f \text{ は } I \text{ で有界である}\}$$

と書く.

(2) 任意の $f \in R^\infty(I)$ に対し,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

を f の I での**上限ノルム**と言う.

命題 1.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間とすると, $R^\infty(I)$ は $F(I)$ の**部分空間**である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $0 \in R^\infty(I)$.

(ii) $f, g \in R^\infty(I) \Rightarrow f + g \in R^\infty(I)$.

(iii) $c \in \mathbb{R},\ f \in R^\infty(I) \Rightarrow cf \in R^\infty(I)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間とすると, $(R^\infty(I), \| * \|_\infty)$ は**ノルム空間**である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall f \in R^\infty(I),\ (\|f\|_\infty \geq 0) \wedge (\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0)$.

(ii) (三角不等式) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\ (f, g \in R^\infty(I))$.

(iii) $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty\ (c \in \mathbb{R},\ f \in R^\infty(I))$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 関数列の各点収束・一様収束

定義 1.2.5. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間とする．$f : \mathbb{N} \to F(I)$ を $F(I)$ の**関数列**と言う．このとき，

$$f(n) = f_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

と書き，f_n を $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**一般項**と言う．

定義 1.2.6. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列とする．$n \to \infty$ のとき，f_n が $f \in F(I)$ に I で**各点収束**するとは，任意の $x \in I$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

となることを言う．

> 定義 1.2.6 の論理式
>
> $$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N(x,\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

例. $F([0,1])$ の関数列 $\{f_n\}_{n\geq 2}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}\right), \\ 2n - n^2 x & \left(\dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{2}{n}\right), \\ 0 & \left(\dfrac{2}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

によって定義するとき，$\{f_n\}_{n\geq 2}$ は 0 に $[0,1]$ で各点収束する．

証明．省略 (講義の自筆ノート)． □

定義 1.2.7. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間とする．$f : \mathbb{N} \to R^\infty(I)$ を $R^\infty(I)$ の**関数列**と言う．このとき，

$$f(n) = f_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

と書き，f_n を $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**一般項**と言う．

定義 1.2.8. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列とする．$n \to \infty$ のとき，f_n が $f \in F(I)$ に I で**一様収束**するとは，

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

となることを言う．

> 定義 1.2.8 の論理式
>
> $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon).$$

例. $F(\mathbb{R})$ の関数列 $\{f_n\}_{n\geq 2}$ を

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\log n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n\geq 2}$ は 0 に $\mathbb{R}$ で一様収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

命題 1.2.4 (一様収束の強弱)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列とするとき, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $f \in F(I)$ に I で一様収束すれば, f_n は f に I で各点収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

例. $F([0,1])$ の関数列 $\{f_n\}_{n\geq 2}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}\right), \\ 2n - n^2 x & \left(\dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{2}{n}\right), \\ 0 & \left(\dfrac{2}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n\geq 2}$ は 0 に $[0,1]$ で各点収束するが, 一様収束しない.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

命題 1.2.5 (一様収束の閉性)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列とするとき, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $f \in F(I)$ に I で一様収束すれば, $f \in R^\infty(I)$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

• Cauchy の定理

定義 1.2.9. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列とする. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $R^\infty(I)$ に**収束**するとは,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

となる $f \in R^\infty(I)$ が存在することを言う.

定義 1.2.10. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列とする. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $R^\infty(I)$ の **Cauchy 列**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $m, n \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 1.2.10 の論理式

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ (m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon).$$

命題 1.2.6. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間とするとき, $R^\infty(I)$ の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $R^\infty(I)$ に収束すれば, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $R^\infty(I)$ の Cauchy 列である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 1.2.1 (Cauchy の定理)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間とするとき, $R^\infty(I)$ の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $R^\infty(I)$ の Cauchy 列ならば, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $R^\infty(I)$ に収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

1.3　連続関数列の極限

● 連続関数

定義 1.3.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f : I \to \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

(1) f が $a \in I$ で**連続**であるとは,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

となることを言う.

(2) f が I で**連続**であるとは, f が任意の $a \in I$ で連続であることを言う.

定義 1.3.1(2) の論理式

$$\forall a \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(a,\varepsilon) > 0,\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \delta(a,\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon).$$

例. $f \in F((0,\infty))$ を

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

によって定義すると, f は $(0,\infty)$ で連続である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

• 一様連続関数

定義 1.3.2 (ε-δ 論法)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f : I \to \mathbb{R}$ を I 上の関数とする. f が I で**一様連続**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x, y \in I$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 1.3.2 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x, y \in I,\ (|x - y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

命題 1.3.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f : I \to \mathbb{R}$ を I 上の関数とするとき, f が I で一様連続ならば, f は I で連続である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

例. $f, g \in F(\mathbb{R})$ を

$$f(x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$g(x) = \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義すると, f, g は $\mathbb{R}$ で一様連続である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 1.3.1 (Heine-Cantor の定理)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とするとき, f が $[a, b]$ で連続ならば, f は $[a, b]$ で一様連続である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

例. $f \in F((0, \infty))$ を

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

によって定義すると, f は $(0, \infty)$ で連続であるが, 一様連続でない.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

● 連続関数空間

定義 1.3.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする.

(1) $[a,b]$ 上連続関数全体の集合を

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\ ;\ f \text{ は } [a,b] \text{ で連続である }\}$$

と書く.

(2) 任意の $f \in C([a,b])$ に対し,

$$\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$$

を f の $[a,b]$ での**最大ノルム**と言う.

$R^\infty([a,b])$, $C([a,b])$ の包含関係

$$C([a,b]) \subsetneq R^\infty([a,b]).$$

命題 1.3.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とすると, $C([a,b])$ は $F([a,b])$ の部分空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $0 \in C([a,b])$.

(ii) $f, g \in C([a,b]) \Rightarrow f + g \in C([a,b])$.

(iii) $c \in \mathbb{R}$, $f \in C([a,b]) \Rightarrow cf \in C([a,b])$.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 1.3.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とすると, $(C([a,b]), \|*\|_\infty)$ はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall f \in C([a,b]), (\|f\|_\infty \ge 0) \wedge (\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0)$.

(ii) (三角不等式) $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ $(f, g \in C([a,b]))$.

(iii) $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty$ $(c \in \mathbb{R},\ f \in C([a,b]))$.

証明. 省略 (命題 1.2.3). □

定義 1.3.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする. $f : \mathbb{N} \to C([a,b])$ を $C([a,b])$ の**関数列**と言う. このとき,

$$f(n) = f_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

と書き, f_n を $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**一般項**と言う.

命題 1.3.4 (一様収束の閉性)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $C([a,b])$ の関数列とするとき, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $f \in F([a,b])$ に $[a,b]$ で一様収束すれば, $f \in C([a,b])$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $C([a,b])$ の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$f_n(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n \quad (a \leq x \leq b)$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (a \leq x < b), \\ 1 & (x = b) \end{cases}$$

に $[a,b]$ で各点収束するが, 一様収束しない.

• Cauchy の定理

定義 1.3.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $C([a,b])$ の関数列とする. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $C([a,b])$ に**収束**するとは,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

となる $f \in C([a,b])$ が存在することを言う.

定義 1.3.6. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $C([a,b])$ の関数列とする. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $C([a,b])$ の **Cauchy 列**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $m, n \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 1.3.6 の論理式

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ (m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon).$$

命題 1.3.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, $C([a,b])$ の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $C([a,b])$ に収束すれば, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $C([a,b])$ の Cauchy 列である.

証明. 省略 (命題 1.2.6). □

定理 1.3.2 (Cauchy の定理)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, $C([a,b])$ の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $C([a,b])$ の Cauchy 列ならば, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $C([a,b])$ に収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 連続関数の可積分性

定義 1.3.7. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f : I \to \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする.

$$\omega(f; I) = \sup_{x,y \in I} |f(x) - f(y)|$$

を f の I での**振幅**と言う.

命題 1.3.6. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : I \to \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする.

(1) $\omega(f; I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$.

(2) $(I = [a, b])$ 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\overline{S}(f; \Delta) - \underline{S}(f; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} \omega(f; [x_{k-1}, x_k])(x_k - x_{k-1})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 1.3.3 (連続関数の可積分性)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とするとき, f が $[a, b]$ で連続ならば, f は $[a, b]$ で可積分である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第2章　積分の基本性質

2.1　可積分関数と積分

命題 2.1.1 (和・スカラー倍の可積分性)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) f, g が $[a, b]$ で可積分ならば, $f + g$ は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

が成り立つ.

(2) f が $[a, b]$ で可積分ならば, cf は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.1.2 (積・商の可積分性)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする.

(1) f, g が $[a, b]$ で可積分ならば, fg は $[a, b]$ で可積分である.

(2) f, g が $[a, b]$ で可積分であり, かつ $\dfrac{1}{g}$ が $[a, b]$ で有界ならば, $\dfrac{f}{g}$ は $[a, b]$ で可積分である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.1.3 (積分の単調性)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とするとき, $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, かつ f, g が $[a, b]$ で可積分ならば,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.1.4 (積分の三角不等式)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とするとき, f が $[a, b]$ で可積分ならば, $|f|$ は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

命題 2.1.5 (Schwarz の不等式)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とするとき, f, g が $[a, b]$ で可積分ならば, $|fg|$, f^2, g^2 は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}\sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

命題 2.1.6 (積分の有限加法性)**.** $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$, $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ を $[a, c]$ 上の有界関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は $[a, c]$ で可積分である.

(ii) f は $[a, b]$, $[b, c]$ で可積分である.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

2.2 連続関数と積分

命題 2.2.1 (積分の強単調性)**.** $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上の連続関数とするとき, $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, かつ $\exists x_0 \in [a,b]$, $f(x_0) < g(x_0)$ ならば,

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.2.2 (積分の非退化性)**.** $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上の連続関数とするとき, f が

$$\int_a^b |f(x)|dx = 0$$

を満たせば, $f = 0$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $[a,b]$ 上の関数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (a \leq x < b), \\ 1 & (x = b) \end{cases}$$

によって定義すると, f は $[a,b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b |f(x)|dx = 0$$

を満たすが, $f \neq 0$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.2.1 (微分積分学の基本定理)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間, $f : I \to \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

(1) (原始関数) f が I で微分可能であり, かつ f' が I で可積分ならば, 任意の $a,b \in I$, $a \neq b$ に対して

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

が成り立つ.

(2) (不定積分) f が I で可積分であり, かつ f が $b \in I$ で連続ならば, 任意の $a \in I$ に対し,

$$F(x) = \int_a^x f(u)du \quad (x \in I)$$

によって定義される $F : I \to \mathbb{R}$ は b で微分可能であり, $F'(b) = f(b)$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.2.2 (置換積分法)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上の微分可能関数で, $\varphi' : [a,b] \to \mathbb{R}$ が $[a,b]$ で可積分であるものとする. $c = \varphi(a)$, $d = \varphi(b)$ とおき, $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ を $[c,d]$ 上の連続関数とすると, $(f \circ \varphi)\varphi'$ は $[a,b]$ で可積分であり,

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^b (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.2.3 (部分積分法)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上の微分可能関数とするとき, f', g' が $[a,b]$ で可積分ならば, fg', $f'g$ は $[a,b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (Wallis 積分)**.**

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくと,

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n : \text{偶数}), \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

が成り立つ. ただし,

$$(-1)!! = 1, \quad 0!! = 1, \quad n!! = \begin{cases} n(n-2)\cdots 4 \cdot 2 & (n : \text{偶数}), \\ n(n-2)\cdots 3 \cdot 1 & (n : \text{奇数}). \end{cases}$$

(2) $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくと,

$$J_n = I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n : \text{偶数}), \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.2.3 (Wallis の公式 I)**.** 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を

$$a_n = \frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$$

によって定義すると, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\pi}{2}$ となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

命題 2.2.4 (Wallis の公式 II)**.** 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義すると, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} a_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

2.3 可積分関数列の極限

● 可積分関数空間

定義 2.3.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする.

(1) $[a,b]$ 上可積分関数全体の集合を

$$R^1([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ は } [a,b] \text{ で可積分である } \}$$

と書く.

(2) 任意の $f \in R^1([a,b])$ に対し,

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$$

を f の $[a,b]$ での**上限ノルム**と言う.

$R^\infty([a,b])$, $C([a,b])$, $R^1([a,b])$ の包含関係

$$C([a,b]) \subsetneq R^1([a,b]) \subsetneq R^\infty([a,b]).$$

命題 2.3.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とすると, $R^1([a,b])$ は $F([a,b])$ の部分空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $0 \in R^1([a,b])$.

(ii) $f, g \in R^1([a,b]) \Rightarrow f + g \in R^1([a,b])$.

(iii) $c \in \mathbb{R}$, $f \in R^1([a,b]) \Rightarrow cf \in R^1([a,b])$.

証明. 省略 (命題 2.1.1). □

命題 2.3.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とすると, $(R^1([a,b]), \| * \|_\infty)$ はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall f \in R^1([a,b])$, $(\|f\|_\infty \ge 0) \wedge (\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0)$.

(ii) (三角不等式) $\|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ $(f, g \in R^1([a,b]))$.

(iii) $\|cf\|_\infty = |c| \|f\|_\infty$ $(c \in \mathbb{R},\ f \in R^1([a,b]))$.

証明. 省略 (命題 1.2.3). □

定義 2.3.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする. $f : \mathbb{N} \to R^1([a,b])$ を $R^1([a,b])$ の**関数列**と言う. このとき,

$$f(n) = f_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

と書き, f_n を $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の**一般項**と言う.

命題 2.3.3 (一様収束の閉性)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^1([a,b])$ の関数列とするとき, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $f \in F([a,b])$ に $[a,b]$ で一様収束すれば, $f \in R^1([a,b])$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• Cauchy の定理

定義 2.3.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $R^1([a,b])$ の関数列とする. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $R^1([a,b])$ に**収束**するとは,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

となる $f \in R^1([a,b])$ が存在することを言う.

定義 2.3.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $R^1([a,b])$ の関数列とする. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $R^1([a,b])$ の **Cauchy 列**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $m, n \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 2.3.4 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ (m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon).$$

命題 2.3.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, $R^1([a,b])$ の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $R^1([a,b])$ に収束すれば, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $R^1([a,b])$ の Cauchy 列である.

証明. 省略 (命題 1.2.6). □

定理 2.3.1 (Cauchy の定理)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, $R^1([a,b])$ の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $R^1([a,b])$ の Cauchy 列ならば, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $R^1([a,b])$ に収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 項別微積分定理

定理 2.3.2 (項別積分定理)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $R^1([a,b])$ の関数列とするとき, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $f \in F([a,b])$ に $[a,b]$ で一様収束すれば, $f \in R^1([a,b])$ であり,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.3.3 (項別微分定理)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし,

$$C^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ は } [a,b] \text{ で } C^1\text{級である }\}$$

とおく. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $C^1([a,b])$ の関数列とするとき, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $f \in F([a,b])$ に $[a,b]$ で各点収束し, かつ $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $g \in F([a,b])$ に $[a,b]$ で一様収束すれば, $f \in C^1([a,b])$, $g \in C([a,b])$ であり,

$$f'(x) = g(x) \quad (a \le x \le b)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第3章　広義積分の収束・発散

3.1　$[a,\infty)$ での広義積分

● 関数の上極限・下極限

定義 3.1.1. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ を $[a,\infty)$ 上の関数とする.

$$\limsup_{x\to\infty} f(x) = \lim_{M\to\infty}\left(\sup_{x\geq M} f(x)\right), \quad \liminf_{x\to\infty} f(x) = \lim_{M\to\infty}\left(\inf_{x\geq M} f(x)\right)$$

をそれぞれ f の $x\to\infty$ での**上極限**, **下極限**と言う.

注意. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ を $[a,\infty)$ 上の関数とすると, f の $x\to\infty$ での上極限・下極限は

$$\limsup_{x\to\infty} f(x),\ \liminf_{x\to\infty} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

として存在する.

命題 3.1.1. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ を $[a,\infty)$ 上の関数とすると,

$$\liminf_{x\to\infty} f(x) \leq \limsup_{x\to\infty} f(x)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 3.1.1. $a \in \mathbb{R}$, $F : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ を $[a,\infty)$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, $F([a,\infty)) = \{F(M)\ ;\ M \geq a\} \subseteq \mathbb{R}$ とおくとき, $\alpha = \inf_{M\geq a} F(M)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) α は $F([a,\infty))$ の下界である.

(ii) 任意の $y > \alpha$ に対し, $y > F(M(y))$ を満たす $M(y) \geq a$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

補題 3.1.2. $a \in \mathbb{R}$, $F : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ を $[a,\infty)$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, $F([a,\infty)) = \{F(M)\ ;\ M \geq a\} \subseteq \mathbb{R}$ とおくとき, $\alpha = \sup_{M\geq a} F(M)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) α は $F([a,\infty))$ の上界である.

(ii) 任意の $y < \alpha$ に対し, $y < F(M(y))$ を満たす $M(y) \geq a$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). $\square$

定理 3.1.1. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数とすると,

$$\limsup_{x\to\infty} f(x) = \inf_{M \geq a} \left(\sup_{x \geq M} f(x) \right), \quad \liminf_{x\to\infty} f(x) = \sup_{M \geq a} \left(\inf_{x \geq M} f(x) \right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

補題 3.1.3. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \limsup_{x\to\infty} f(x)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 任意の $y > \alpha$ に対してある $M(y) \geq a$ が存在し, 任意の $x \geq M(y)$ に対して $y > f(x)$ が成り立つ.

(ii) 任意の $y < \alpha$, $M \geq a$ に対し, $y < f(x(y, M))$ を満たす $x(y, M) \geq M$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

補題 3.1.4. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \liminf_{x\to\infty} f(x)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 任意の $y < \alpha$ に対してある $M(y) \geq a$ が存在し, 任意の $x \geq M(y)$ に対して $y < f(x)$ が成り立つ.

(ii) 任意の $y > \alpha$, $M \geq a$ に対し, $y > f(x(y, M))$ を満たす $x(y, M) \geq M$ が存在する.

証明. 省略 (補題 3.1.3). $\square$

定理 3.1.2. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $x \to \infty$ のとき, $f(x)$ は収束する.

(ii) $\liminf_{x\to\infty} f(x) = \limsup_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \liminf_{x\to\infty} f(x) = \limsup_{x\to\infty} f(x)$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

注意. f の $x \to -\infty$ での上極限 $\limsup_{x\to-\infty} f(x)$・下極限 $\liminf_{x\to-\infty} f(x)$ も, 定義 3.1.1 と同様に定義される.

● 広義積分

定義 3.1.2. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数とする. f が $[a, \infty)$ で**広義可積分**であるとは, f が次の (i), (ii) を満たすことを言う.

(i) 任意の $v > a$ に対して f は $[a, v]$ で可積分である.

(ii) $\displaystyle\lim_{v\to\infty}\int_a^v f(x)dx$ は収束する.

このとき,

$$\lim_{v\to\infty}\int_a^v f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx$$

と書き, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ を f の $[a, \infty)$ での**広義積分**と言う.

注意. $[a, \infty)$ での広義積分に対しても, 積分の基本性質が成り立つ.

命題 3.1.2. $a > 0$ とすると, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{v\to\infty}\int_a^v \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \infty & (\alpha \leq 1), \\ \dfrac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} & (\alpha > 1) \end{cases}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 広義積分の収束判定法

命題 3.1.3 (比較判定法)**.** $a \in \mathbb{R}$, $f, g : [a, \infty) \to (0, \infty)$ を定義 3.1.2(i) を満たす $[a, \infty)$ 上の正値関数とする.

(1) $0 \leq \limsup_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} < \infty$, かつ $\lim_{v\to\infty} \displaystyle\int_a^v g(x)dx$ が収束すれば, $\lim_{v\to\infty} \displaystyle\int_a^v f(x)dx$ は収束する.

(2) $0 < \liminf_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq \infty$, かつ $\lim_{v\to\infty} \displaystyle\int_a^v g(x)dx$ が発散すれば, $\lim_{v\to\infty} \displaystyle\int_a^v f(x)dx$ は発散する.

(3) $0 < \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} < \infty$ ならば, $\lim_{v\to\infty} \displaystyle\int_a^v f(x)dx$, $\lim_{v\to\infty} \displaystyle\int_a^v g(x)dx$ は共に収束するか, または発散する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 3.1.4 (次数判定法)**.** $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to (0, \infty)$ を定義 3.1.2(i) を満たす $[a, \infty)$ 上の正値関数とする.

(1) $0 \leq \limsup_{x\to\infty} x^\alpha f(x) < \infty$ を満たす $\alpha > 1$ が存在すれば, $\lim_{v\to\infty} \displaystyle\int_a^v f(x)dx$ は収束する.

(2) $0 < \liminf_{x\to\infty} x^\alpha f(x) \leq \infty$ を満たす $\alpha \leq 1$ が存在すれば, $\lim_{v\to\infty} \displaystyle\int_a^v f(x)dx$ は発散する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• 広義積分の絶対収束・条件収束

定義 3.1.3. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ を定義 3.1.2(i) を満たす $[a, \infty)$ 上の関数とする.

(1) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ が**絶対収束**するとは, $\displaystyle\lim_{v\to\infty}\int_a^v |f(x)|dx$ が収束することを言う.

(2) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ が**条件収束**するとは, $\displaystyle\lim_{v\to\infty}\int_a^v f(x)dx$ が収束し, $\displaystyle\lim_{v\to\infty}\int_a^v |f(x)|dx$ が発散することを言う.

補題 3.1.5. $a \in \mathbb{R}$, $F : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数とすると, 次 (i), (ii) は同値である.

(i) $\displaystyle\lim_{v\to\infty} F(v)$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \geq a$ が存在し, 任意の $u, v > N(\varepsilon)$ に対して

$$|F(v) - F(u)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 3.1.3 (Cauchy の収束判定法)**.** $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ を定義 3.1.2(i) を満たす $[a, \infty)$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\displaystyle\lim_{v\to\infty}\int_a^v f(x)dx$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \geq a$ が存在し, 任意の $u, v > N(\varepsilon)$ に対して

$$\left|\int_u^v f(x)dx\right| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 3.1.5 (広義積分の三角不等式)**.** $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ を定義 3.1.2(i) を満たす $[a, \infty)$ 上の関数とするとき, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ が絶対収束すれば, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ は収束し,

$$\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. f の $(-\infty, b]$ での広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx$ とその絶対収束・条件収束も, 定義 3.1.2, 定義 3.1.3 と同様に定義される.

3.2 $(a,b]$ での広義積分

● 関数の上極限・下極限

定義 3.2.1. $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ を $(a,b]$ 上の関数とする.

$$\limsup_{x\to a+0} f(x) = \lim_{\delta\to+0}\left(\sup_{a<x\le a+\delta} f(x)\right), \quad \liminf_{x\to a+0} f(x) = \lim_{\delta\to+0}\left(\inf_{a<x\le a+\delta} f(x)\right)$$

をそれぞれ f の $x\to a+0$ での**上極限**, **下極限**と言う.

注意. $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ を $(a,b]$ 上の関数とすると, f の $x\to a+0$ での上極限・下極限は

$$\limsup_{x\to a+0} f(x),\ \liminf_{x\to a+0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

として存在する.

命題 3.2.1. $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ を $(a,b]$ 上の関数とすると,

$$\liminf_{x\to a+0} f(x) \le \limsup_{x\to a+0} f(x)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 3.1.1). □

補題 3.2.1. $c>0$, $F:(0,c]\to\mathbb{R}$ を $(0,c]$ 上の関数, $\alpha\in\mathbb{R}$ とし, $F((0,c]) = \{F(\delta)\ ;\ 0<\delta\le c\} \subseteq \mathbb{R}$ とおくとき, $\alpha = \inf_{0<\delta\le c} F(\delta)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) α は $F((0,c])$ の下界である.

(ii) 任意の $y>\alpha$ に対し, $y>F(\delta(y))$ を満たす $0<\delta(y)\le c$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

補題 3.2.2. $c>0$, $F:(0,c]\to\mathbb{R}$ を $(0,c]$ 上の関数, $\alpha\in\mathbb{R}$ とし, $F((0,c]) = \{F(\delta)\ ;\ 0<\delta\le c\} \subseteq \mathbb{R}$ とおくとき, $\alpha = \sup_{0<\delta\le c} F(\delta)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) α は $F((0,c])$ の上界である.

(ii) 任意の $y<\alpha$ に対し, $y<F(\delta(y))$ を満たす $0<\delta(y)\le c$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 3.2.1. $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ を $(a,b]$ 上の関数とすると,

$$\limsup_{x\to a+0} f(x) = \inf_{0<\delta\le b-a}\left(\sup_{a<x\le a+\delta} f(x)\right), \quad \liminf_{x\to a+0} f(x) = \sup_{0<\delta\le b-a}\left(\inf_{a<x\le a+\delta} f(x)\right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (定理 3.1.1). □

補題 3.2.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \limsup_{x \to a+0} f(x)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 任意の $y > \alpha$ に対してある $0 < \delta(y) \leq b - a$ が存在し, 任意の $a < x \leq a + \delta(y)$ に対して $y > f(x)$ が成り立つ.

(ii) 任意の $y < \alpha$, $0 < \delta \leq b - a$ に対し, $y < f(x(y, \delta))$ を満たす $a < x(y, \delta) \leq b$ が存在する.

証明. 省略 (補題 3.1.3). □

補題 3.2.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \liminf_{x \to a+0} f(x)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 任意の $y < \alpha$ に対してある $0 < \delta(y) \leq b - a$ が存在し, 任意の $a < x \leq a + \delta(y)$ に対して $y < f(x)$ が成り立つ.

(ii) 任意の $y > \alpha$, $0 < \delta \leq b - a$ に対し, $y > f(x(y, \delta))$ を満たす $a < x(y, \delta) \leq b$ が存在する.

証明. 省略 (補題 3.1.4). □

定理 3.2.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $x \to a + 0$ のとき, $f(x)$ は収束する.

(ii) $\liminf_{x \to a+0} f(x) = \limsup_{x \to a+0} f(x) \in \mathbb{R}$.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば, $\lim_{x \to a+0} f(x) = \liminf_{x \to a+0} f(x) = \limsup_{x \to a+0} f(x)$ が成り立つ.

証明. 省略 (定理 3.1.2). □

注意. f の $x \to b - 0$ での上極限 $\limsup_{x \to b-0} f(x)$・下極限 $\liminf_{x \to b-0} f(x)$ も, 定義 3.2.1 と同様に定義される.

• 広義積分

定義 3.2.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数とする． f が $(a, b]$ で**広義可積分**であるとは, f が次の (i), (ii) を満たすことを言う．

(i) 任意の $a < u < b$ に対して f は $[u, b]$ で可積分である．

(ii) $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b f(x)dx$ は収束する．

このとき,

$$\lim_{u \to a+0} \int_u^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

と書き, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を f の $(a, b]$ での**広義積分**と言う．

注意. $(a, b]$ での広義積分に対しても, 積分の基本性質が成り立つ．

命題 3.2.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とすると, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{u \to a+0} \int_u^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & (\alpha < 1), \\ \infty & (\alpha \geq 1) \end{cases}$$

が成り立つ．

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• 広義積分の収束判定法

命題 3.2.3 (比較判定法)**.** $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ f, g : (a, b] \to (0, \infty)$ を定義 3.2.2(i) を満たす $(a, b]$ 上の正値関数とする.

(1) $0 \leq \displaystyle\limsup_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$, かつ $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b g(x)dx$ が収束すれば, $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b f(x)dx$ は収束する.

(2) $0 < \displaystyle\liminf_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \infty$, かつ $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b g(x)dx$ が発散すれば, $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b f(x)dx$ は発散する.

(3) $0 < \displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ ならば, $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b f(x)dx$, $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b g(x)dx$ は共に収束するか, または発散する.

証明. 省略 (命題 3.1.3). □

命題 3.2.4 (次数判定法)**.** $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ f : (a, b] \to (0, \infty)$ を定義 3.2.2(i) を満たす $(a, b]$ 上の正値関数とする.

(1) $0 \leq \displaystyle\limsup_{x \to a+0} (x - a)^\alpha f(x) < \infty$ を満たす $\alpha < 1$ が存在すれば, $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b f(x)dx$ は収束する.

(2) $0 < \displaystyle\liminf_{x \to a+0} (x - a)^\alpha f(x) \leq \infty$ を満たす $\alpha \geq 1$ が存在すれば, $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b f(x)dx$ は発散する.

証明. 省略 (命題 3.1.4). □

• 広義積分の絶対収束・条件収束

定義 3.2.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ を定義 3.2.2(i) を満たす $(a, b]$ 上の関数とする.

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が**絶対収束**するとは, $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b |f(x)|dx$ が収束することを言う.

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が**条件収束**するとは, $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b f(x)dx$ が収束し, $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b |f(x)|dx$ が発散することを言う.

補題 3.2.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $F : (a, b] \to \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\displaystyle\lim_{u \to a+0} F(u)$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $0 < \delta(\varepsilon) \leq b - a$ が存在し, 任意の $a < u, v < a + \delta(\varepsilon)$ に対して

$$|F(v) - F(u)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 3.2.3 (Cauchy の収束判定法)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ を定義 3.2.2(i) を満たす $(a, b]$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\displaystyle\lim_{u \to a+0} \int_u^b f(x)dx$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $0 < \delta(\varepsilon) \leq b - a$ が存在し, 任意の $a < u, v < a + \delta(\varepsilon)$ に対して

$$\left| \int_u^v f(x)dx \right| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (定理 3.1.3). □

命題 3.2.5 (広義積分の三角不等式)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ を定義 3.2.2(i) を満たす $(a, b]$ 上の関数とするとき, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が絶対収束すれば, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束し,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 3.1.5). □

注意. f の $[a, b)$ での広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ とその絶対収束・条件収束も, 定義 3.2.2, 定義 3.2.3 と同様に定義される.

3.3 Gamma 関数と Beta 関数

• Gamma 関数

命題 3.3.1. 任意の $x > 0$ に対して

$$\lim_{u \to +0} \int_u^1 t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \lim_{v \to \infty} \int_1^v t^{x-1} e^{-t} dt$$

は収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.3.1.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

によって定義される $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を **Gamma 関数**と言う.

注意. 任意の $x > 0$ に対して

$$\lim_{u \to +0} \int_u^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \lim_{v \to \infty} \int_1^v t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

が成り立つ.

命題 3.3.2. $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を Gamma 関数とする.

(1) $\Gamma(x) > 0$ $(x > 0)$.

(2) $\Gamma(1) = 1$.

(3) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $(x > 0)$.

(4) $\Gamma(n+1) = n!$ $(n \in \mathbb{N})$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• Beta 関数

命題 3.3.3. 任意の $x, y > 0$ に対して

$$\lim_{u \to +0} \int_u^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad \lim_{v \to 1-0} \int_{\frac{1}{2}}^v t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

は収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.3.2.

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (x, y > 0)$$

によって定義される $B : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ を **Beta 関数**と言う.

注意. 任意の $x, y > 0$ に対して

$$\lim_{u \to +0} \int_u^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt + \lim_{v \to 1-0} \int_{\frac{1}{2}}^v t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

が成り立つ.

命題 3.3.4. $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を Gamma 関数, $B : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ を Beta 関数とする.

(1) $B(x, y) = B(y, x)$ $(x, y > 0)$.

(2) $B(m, n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ $(m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq 1)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

3.4　領域の面積

● 縦線閉領域の面積

定義 3.4.1. $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ を $[a,b]$ 上の可積分関数で, $\varphi \leq \psi$, つまり, $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ を満たすものとする.

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a \leq x \leq b, \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ を $\mathbb{R}^2$ の**縦線閉領域**と言う.

(2) $a(D) = \displaystyle\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx$ を D の**面積**と言う.

例 (楕円領域)**.** $a, b > 0$ とし, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}$ とおくと,

$$a(D) = \pi ab$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.4.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の有界閉でない区間, $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ を I 上の広義可積分関数で, $\varphi \leq \psi$, つまり, $x \in I$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ を満たすものとする.

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in I, \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ を $\mathbb{R}^2$ の**広義縦線閉領域**と言う.

(2) $a(D) = \displaystyle\int_I (\psi(x) - \varphi(x))dx$ を D の**面積**と言う.

例 (層状領域)**.** $a > 0$ とし, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in \mathbb{R}, \ -\dfrac{1}{x^2 + a^2} \leq y \leq \dfrac{1}{x^2 + a^2}\right\}$ とおくと,

$$a(D) = \frac{2\pi}{a}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 極閉領域の面積

定義 3.4.3. 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対し,

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

によって定義される $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ を (x, y) の**極座標**と言い,

$$\arg(x, y) = \theta$$

を (x, y) の**偏角** (argument) と言う. $(x, y) = (0, 0)$ に対しては, $r = 0$ によって定義し, θ は定義しない.

例 (レムニスケート)**.** $a > 0$ とし, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\}$ とおく. D を極座標 (r, θ) で表すと,

$$D = \left\{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \ ; \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ r^2 = 2a^2\cos 2\theta\right\}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.4.4. $0 \le \alpha, \beta \le 2\pi$, $\alpha < \beta$, $\varphi : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ を $[\alpha, \beta]$ 上の非負値可積分関数とする.

(1) $D = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \ ; \ \alpha \le \theta \le \beta, \ 0 \le r \le \varphi(\theta)\}$ を $\mathbb{R}^2$ の**極閉領域**と言う.

(2) $a(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi(\theta)^2 d\theta$ を D の**面積**と言う.

例 (レムニスケート)**.** $a > 0$ とし, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\}$ とおくと,

$$a(D) = 2a^2$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

3.5 曲線の長さ

• C^1 級パラメータ曲線

定義 3.5.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の C^1 級関数とする.

(1) $(x, y) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の**向き付けられた C^1 級パラメータ曲線**と言う.

(2) $C = \{(x(t), y(t))\ ;\ a \leq t \leq b\}$ を (x, y) の**跡**と言う.

定義 3.5.2. $k \in \{0, 1\}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$, $(x_k, y_k) : [a_k, b_k] \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とする. (x_0, y_0) が (x_1, y_1) に**向きを込めて C^1 級同値**であるとは, 次の (i), (ii) を満たす $[a_0, b_0]$ 上の C^1 級関数 $\varphi : [a_0, b_0] \to [a_1, b_1]$ が存在することを言う.

(i) $\varphi(a_0) = a_1$, $\varphi(b_0) = b_1$, $\varphi'(t) > 0$ $(a_0 \leq t \leq b_0)$.

(ii) $x_0(t) = (x_1 \circ \varphi)(t)$, $y_0(t) = (y_1 \circ \varphi)(t)$ $(a_0 \leq t \leq b_0)$.

このとき, $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ と書く.

命題 3.5.1. $\sim$ は $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線の**同値関係**である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) (反射律) $(x, y) \sim (x, y)$.

(ii) (対称律) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Rightarrow (x_1, y_1) \sim (x_0, y_0)$.

(iii) (推移律) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Rightarrow (x_0, y_0) \sim (x_2, y_2)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

定義 3.5.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(x, y) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とする.

(1) $[(x, y)] = \{(\xi, \eta)\ ;\ (x, y) \sim (\xi, \eta)\}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の**向き付けられた C^1 級曲線**と言う.

(2) $C = \{(x(t), y(t))\ ;\ a \leq t \leq b\}$ を $[(x, y)]$ の**跡**と言う.

• C^1 級パラメータ曲線の長さ

命題 3.5.2 (曲線の長さの well-definedness)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(x, y) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とすると, 任意の $(\xi, \eta) \in [(x, y)]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $(\xi, \eta) : [c, d] \to \mathbb{R}^2$ に対して

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_c^d \sqrt{\xi'(u)^2 + \eta'(u)^2} du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.5.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(x, y) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{(x(t), y(t))\ ;\ a \leq t \leq b\}$ とおく.

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

を C の**長さ**と言う.

注意 (命題 3.5.2)**.** $\mathbb{R}^2$ 上の向き付けられた C^1 級曲線の長さは, パラメータの選択に依存しない.

例 (サイクロイド)**.** $a > 0$ とし, $C = \{(a(t - \sin t), a(1 - \cos t))\ ;\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$ とおくと,

$$l(C) = 8a$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• 直交座標上の C^1 級曲線の長さ

定義 3.5.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の C^1 級関数とする.

$$G(\varphi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a \leq x \leq b, \ y = \varphi(x)\}$$

を φ の**グラフ**と言う.

命題 3.5.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の C^1 級関数とすると,

$$l(G(\varphi)) = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (放物線)**.** $a, p > 0$ とし, $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x \leq a, \ y = \dfrac{x^2}{4p} \right\}$ とおくと,

$$l(C) = \frac{1}{2} \left\{ a \sqrt{\frac{a^2}{4p^2} + 1} + 2p \log \left(\frac{a}{2p} + \sqrt{\frac{a^2}{4p^2} + 1} \right) \right\}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• 極座標上の C^1 級曲線の長さ

定義 3.5.6. $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$, $\alpha < \beta$, $\varphi : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ を $[\alpha, \beta]$ 上の非負値 C^1 級関数とする.

$$G(\varphi) = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \ ; \ \alpha \leq \theta \leq \beta, \ r = \varphi(\theta)\}$$

を φ の**グラフ**と言う.

命題 3.5.4. $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$, $\alpha < \beta$, $\varphi : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ を $[\alpha, \beta]$ 上の非負値 C^1 級関数とすると,

$$l(G(\varphi)) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi(\theta)^2 + \varphi'(\theta)^2} d\theta$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (カージオイド)**.** $a > 0$ とし, $C = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \ ; \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ r = a(1 + \cos\theta)\}$ とおくと,

$$l(C) = 8a$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第 4 章　級数の収束・発散

4.1　数列の上極限・下極限

定義 4.1.1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} a_m\right), \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{m\geq n} a_m\right)$$

をそれぞれ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**上極限**, **下極限**と言う.

注意. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とすると, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の上極限・下極限は

$$\limsup_{n\to\infty} a_n,\ \liminf_{n\to\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

として存在する.

命題 4.1.1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とすると,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 4.1.1. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列, $\alpha\in\mathbb{R}$ とし, $A(\mathbb{N}) = \{A_n\ ;\ n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$ とおくとき, $\alpha = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) α は $A(\mathbb{N})$ の下界である.

(ii) 任意の $x > \alpha$ に対し, $x > A_{N(x)}$ を満たす $N(x)\in\mathbb{N}$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

補題 4.1.2. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列, $\alpha\in\mathbb{R}$ とし, $A(\mathbb{N}) = \{A_n\ ;\ n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$ とおくとき, $\alpha = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) α は $A(\mathbb{N})$ の上界である.

(ii) 任意の $x < \alpha$ に対し, $x < A_{N(x)}$ を満たす $N(x)\in\mathbb{N}$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 4.1.1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とすると,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{m\geq n} a_m \right), \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{m\geq n} a_m \right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 4.1.3. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 任意の $x > \alpha$ に対してある $N(x) \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $m \geq N(x)$ に対して $x > a_m$ が成り立つ.

(ii) 任意の $x < \alpha$, $N \in \mathbb{N}$ に対し, $x < a_{m(x,N)}$ を満たす $m(x,N) \geq N$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 4.1.4. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \liminf_{n\to\infty} a_n$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 任意の $x < \alpha$ に対してある $N(x) \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $m \geq N(x)$ に対して $x < a_m$ が成り立つ.

(ii) 任意の $x > \alpha$, $N \in \mathbb{N}$ に対し, $x > a_{m(x,N)}$ を満たす $m(x,N) \geq N$ が存在する.

証明. 省略 (補題 4.1.3). □

定理 4.1.2. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する.

(ii) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

さらに, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば, $\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

4.2　級数とその収束判定法

● 級数

定義 4.2.1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする.

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

によって定義される $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**級数**と言い, S_N を $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ の第 N **部分和**と言う.

定義 4.2.2. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列, $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の級数とする.

(1) $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ が $S \in \mathbb{R}$ に**収束**するとは,

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S$$

となることを言う. このとき, $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と書き, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ の**和**と言う.

(2) $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ が ∞ (または $-\infty$) に**発散**するとは,

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \infty \ \left(\text{または} \lim_{N\to\infty} S_N = -\infty\right)$$

となることを言う. このとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \left(\text{または} \sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty\right)$ と書く.

注意. 数列の有限個の項を付け加えたり取り除いたりしても, その級数の収束・発散には関係しない.

命題 4.2.1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とするとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すれば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.2.1 (Cauchy の収束判定法)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $M, N \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $M, N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{M} a_n \right| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. 命題 4.2.1 の逆は成り立たない.

例 (調和級数)**.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

命題 4.2.2 (和・スカラー倍の級数)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列, $c\in\mathbb{R}$ とする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ が収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ は収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n$$

が成り立つ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ が収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n)$ は収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n)=c\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

● 級数の収束判定法 I

定義 4.2.3. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を正数列 $(\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0)$ とする.

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

によって定義される $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**正項級数**と言い, S_N を $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ の第 N **部分和**と言う.

命題 4.2.3 (比較判定法)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を正数列とする.

(1) $0 \leq \limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} < \infty$, かつ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $0 < \liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \leq \infty$, かつ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が発散すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

(3) $0 < \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} < \infty$ ならば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は共に収束するか, または発散する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.2.4 (d'Alembert の収束判定法)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を正数列とする.

(1) $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ならば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ならば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ は収束する.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ は収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.2.5 (Cauchy の収束判定法)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を正数列とする.

(1) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ ならば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ ならば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$ は収束する.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ は収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

• 級数の収束判定法 II

命題 4.2.6 (Euler-Maclaurin の不等式)**.** $a \in \mathbb{N}$, $f : [a, \infty) \to (0, \infty)$ を $[a, \infty)$ 上の単調減少正値関数とすると, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $N \geq a$ に対して

$$\int_a^N f(x)dx + f(N) \leq \sum_{n=a}^{N} f(n) \leq f(a) + \int_a^N f(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

例 (Euler の不等式)**.** 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して

$$\frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \leq 1$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

定理 4.2.2 (Euler-Maclaurin の収束判定法)**.** $a \in \mathbb{N}$, $f : [a, \infty) \to (0, \infty)$ を $[a, \infty)$ 上の単調減少正値関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\displaystyle\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ は収束する.

(ii) $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ は収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

命題 4.2.7. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{は} \begin{cases} \text{収束する} & (\alpha > 1), \\ \text{発散する} & (\alpha \leq 1). \end{cases}$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

命題 4.2.8 (次数判定法)**.** $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とする.

(1) $0 \leq \displaystyle\limsup_{n \to \infty} n^{\alpha} a_n < \infty$ を満たす $\alpha > 1$ が存在すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $0 < \displaystyle\liminf_{n \to \infty} n^{\alpha} a_n \leq \infty$ を満たす $\alpha \leq 1$ が存在すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

例. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ は $\begin{cases} \text{収束する} & (\alpha > 0), \\ \text{発散する} & (\alpha \leq 0). \end{cases}$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

• Abelの定理

命題 4.2.9 (部分和分法)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とすると, $M \leq N$ を満たす任意の $M, N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=M}^{N} a_n(b_{n+1} - b_n) = a_{N+1}b_{N+1} - a_M b_M - \sum_{n=M}^{N} (a_{n+1} - a_n)b_{n+1}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.2.3 (Abel の定理)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i)–(iii) を満たすものとする.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ は収束する.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(iii) $\displaystyle\left\{\sum_{n=0}^{N} b_n\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ は有界である.

このとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ は収束し,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \sup_{N\in\mathbb{N}} \left|\sum_{n=0}^{N} b_n\right|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.2.4 (Leibniz の定理)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ は収束する.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

このとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ は収束し,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

4.3　級数の絶対収束・無条件収束

• 級数の絶対収束・条件収束

定義 4.3.1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が**絶対収束**するとは, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束することを言う.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が**条件収束**するとは, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束し, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が発散することを言う.

命題 4.3.1 (級数の三角不等式)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とするとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束し,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は条件収束し,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.2 (和・スカラー倍の級数)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ は絶対収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

が成り立つ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n)$ は絶対収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.3 (Cauchy 積の級数)**.** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とするとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$ は絶対収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• 級数の無条件収束

命題 4.3.4. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とし, 数列 $\{a_n^{\pm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$a_n^+ = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n), \quad a_n^- = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義する.

(1) $a_n = a_n^+ - a_n^-$ $(n \in \mathbb{N})$.

(2) $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ $(n \in \mathbb{N})$.

(3) $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- = \max\{0, -a_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(4) $a_n^+ \geq 0$, $a_n^- \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.5. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\pm}$ は収束する.

さらに, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.6. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を正数列とし, $\mathcal{F} = \{F \subseteq \mathbb{N}\ ;\ F \text{ は有限 }\}$ とおくと, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(ii) $\displaystyle\left\{\sum_{n\in F} a_n\ ;\ F \in \mathcal{F}\right\}$ は上に有界である.

さらに, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup_{F\in\mathcal{F}} \sum_{n\in F} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.3.2. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする.

(1) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射 $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を $\mathbb{N}$ の**置換**と言う.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が**無条件収束**するとは, $\mathbb{N}$ の任意の置換 σ に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ が収束することを言う.

定理 4.3.1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は無条件収束する.

さらに, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば, $\mathbb{N}$ の任意の置換 σ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の項を置換すると,

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{+,-}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{+,-}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}_{+,-}+\underbrace{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}_{+,-}+\underbrace{\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}_{+,-}+\frac{1}{11}-\cdots\neq\underbrace{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}_{+,+,-}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}}_{+,+,-}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}}_{+,+,-}+\cdots$$

となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第5章　関数項級数, 整級数と実解析関数

5.1　関数項級数

● 関数項級数の各点収束・一様収束

定義 5.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列とする.

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \quad (N \in \mathbb{N},\ x \in I)$$

によって定義される $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ を $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**関数項級数**と言い, S_N を $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ の第 N **部分和関数**と言う.

定義 5.1.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列, $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ を $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の関数項級数とする. $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ が $S \in F(I)$ に I で**各点収束**するとは, 任意の $x \in I$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = S(x)$$

となることを言う. このとき, $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ と書き, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ を $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ の**和関数**と言う.

例. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$ は $(0,\infty)$ で各点収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.1.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列, $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ を $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の関数項級数とする. $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ が $S \in F(I)$ に I で**一様収束**するとは,

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N - S\|_\infty = 0$$

となることを言う.

命題 5.1.1 (一様収束の強弱)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列, $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ を $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の関数項級数とするとき, $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ が $S \in F(I)$ に I で一様収束すれば, $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は S に I で各点収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$ は $(0,\infty)$ で各点収束するが, 一様収束しない.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 関数項級数の収束判定法

定理 5.1.1 (Cauchy の収束判定法)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は I で一様収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $M, N \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $M, N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} f_n - \sum_{n=0}^{M} f_n \right\|_\infty < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.1.2 (Weierstrass の M 判定法)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\|f_n\|_\infty \leq M_n$ を満たす $M_n \geq 0$ が存在する.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ は収束する.

このとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は I で一様収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ は $\mathbb{R}$ で一様収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 項別微積分定理

定理 5.1.3 (項別積分定理)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $R^1([a,b])$ の関数列とするとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が $[a,b]$ で一様収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n \in R^1([a,b])$ であり,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.1.4 (項別微分定理)**.** $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし,

$$C^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\ ;\ f \text{ は } [a,b] \text{ で } C^1\text{級である }\}$$

とおく. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $C^1([a,b])$ の関数列とするとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が $[a,b]$ で各点収束し, かつ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ が $[a,b]$ で一様収束すれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n \in C^1([a,b])$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n' \in C([a,b])$ であり,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• Abelの定理

定理 5.1.5 (Abel の定理)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\left\{\left\||f_{N+1}| + \sum_{n=0}^{N}|f_{n+1} - f_n|\right\|_\infty\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ は上に有界である.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ は I で一様収束する.

このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ は I で一様収束し,

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n\right\|_\infty \leq \sup_{N\in\mathbb{N}}\left\||f_{N+1}| + \sum_{n=0}^{N}|f_{n+1} - f_n|\right\|_\infty \sup_{N\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{n=0}^{N} g_n\right\|_\infty$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

5.2 整級数と実解析関数

● 整級数

定義 5.2.1. $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の形の級数を a を中心とする**整級数**と言う.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ が収束する $x \in \mathbb{R}$ 全体の集合を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の**収束域**と言う.

定理 5.2.1. $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とすると, 次の (i), (ii) を満たす $0 \le r \le \infty$ が一意に存在する.

(i) 任意の $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < r$ に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ は絶対収束する.

(ii) 任意の $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| > r$ に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ は収束しない.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.2.2. $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする. 定理 5.2.1 の $0 \le r \le \infty$ を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の**収束半径**と言う.

命題 5.2.1 (d'Alembert の収束判定法)**.** $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とすると,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{r}$$

を満たす $0 \le r \le \infty$ が $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径である. ただし, $\dfrac{1}{0} = \infty$, $\dfrac{1}{\infty} = 0$ とする.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の収束半径は ∞ である.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ の収束半径は 1 である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.2.2 (Cauchy の収束判定法)**.** $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とすると,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$$

を満たす $0 \le r \le \infty$ が $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径である. ただし, $\dfrac{1}{0} = \infty$, $\dfrac{1}{\infty} = 0$ とする.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

例.

(1) 任意の $a>0$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)^n x^n$ の収束半径は ∞ である.

(2) 任意の $a>0$ に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a^{n^2}x^n$ の収束半径は $\begin{cases}\infty & (0<a<1),\\ 1 & (a=1),\\ 0 & (a>1)\end{cases}$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

命題 5.2.3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n$ をそれぞれ収束半径 $0\le r_1, r_2\le\infty$ の $a\in\mathbb{R}$ を中心とする整級数とする. $r=\min\{r_1,r_2\}$ とおくと, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-a)^n$ の収束半径は r 以上であり,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n \quad (x\in\mathbb{R},\ |x-a|<r)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

命題 5.2.4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n$ をそれぞれ収束半径 $0\le r_1, r_2\le\infty$ の $a\in\mathbb{R}$ を中心とする整級数とする. $r=\min\{r_1,r_2\}$ とおくと, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)(x-a)^n$ の収束半径は r 以上であり,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)(x-a)^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n\right) \quad (x\in\mathbb{R},\ |x-a|<r)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). $\square$

● 実解析関数

定義 5.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f : I \to \mathbb{R}$ を I 上の C^∞ 級関数とする.

(1) f が $a \in I$ で**実解析的**であるとは, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ であり,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (x \in I,\ |x-a| < r)$$

が成り立つことを言う. このとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

を f の a を中心とする **Taylor 級数**と言う.

(2) f が I で**実解析的**であるとは, f が任意の $a \in I$ で実解析的であることを言う.

定理 5.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ を I 上の C^∞ 級関数とするとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ であり,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (x \in I,\ |x-a| < r)$$

が成り立てば, f は $(a-r, a+r)$ で実解析的である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 5.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $N \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ を I 上の C^{N+1} 級関数とすると, 任意の $x \in I$ に対し,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}((1-\theta(x))a + \theta(x)x)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$$

を満たす $0 < \theta(x) < 1$ が存在する. さらに, $R_N(x) = \dfrac{f^{(N+1)}((1-\theta(x))a + \theta(x)x)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$ とおくと, $R_N(x) = o((x-a)^N)$ $(x \to a)$.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 5.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ を I 上の C^∞ 級関数とするとき, ある $r > 0$, $C, M \geq 0$ が存在し,

$$|f^{(n)}(x)| \leq CM^n \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in I,\ |x-a| < r)$$

が成り立てば, f は $(a-r, a+r)$ で実解析的である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 項別微積分定理

補題 5.2.2. $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とすると, 次の (i)–(iii) の収束半径は等しい.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^{n}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.2.4 (項別積分定理)**.** $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とするとき, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ ならば,

$$\int_a^x f(u)du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \quad (x \in \mathbb{R},\ |x-a| < r)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.2.5 (項別微分定理)**.** $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とするとき, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ ならば, f は $(a-r, a+r)$ で微分可能であり,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R},\ |x-a| < r)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.2.6. $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とするとき, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ ならば, f は $(a-r, a+r)$ で C^∞ 級であり,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• Abel の定理

定理 5.2.7 (Abel の定理)**.** $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径は $0 < r \leq \infty$ である.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ は収束する.

このとき, f は $[a, a+r]$ で一様収束し,

$$\lim_{x\to a+r-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.2.8 (Abel の定理)**.** $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径は $0 < r \leq \infty$ である.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n r^n$ は収束する.

このとき, f は $[a-r, a]$ で一様収束し,

$$\lim_{x\to a-r+0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n r^n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (定理 5.2.7). □

5.3 初等関数の Taylor 級数

• 幾何級数, 指数関数, 対数関数, 冪関数

命題 5.3.1. 幾何級数 $\dfrac{1}{1-*}$ は $(-1,1)$ で実解析的であり,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x \in \mathbb{R},\ |x| < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.2. 指数関数 e^* は $\mathbb{R}$ で実解析的であり,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.3. 対数関数 $\log(1+*)$ は $(-1,1)$ で実解析的であり,

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (x \in \mathbb{R},\ |x| < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.3.1. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1) \end{cases}$$

を**二項係数**と言う.

命題 5.3.4. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n\binom{\alpha}{n} + (n+1)\binom{\alpha}{n+1} = \alpha\binom{\alpha}{n}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.5. $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると, 冪関数 $(1+*)^\alpha$ は $(-1,1)$ で実解析的であり,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (x \in \mathbb{R},\ |x| < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• 三角関数, 逆三角関数

命題 5.3.6. 余弦関数 cos は $\mathbb{R}$ で実解析的であり,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.7. 正弦関数 sin は $\mathbb{R}$ で実解析的であり,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.8. 逆正接関数 arctan は $(-1, 1)$ で実解析的であり,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R},\ |x| < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

関連図書

[1] 齋藤 正彦, 微分積分学, 東京図書, 2006 年.

[2] 杉浦 光夫, 解析入門 I(基礎数学), 東京大学出版会, 1980 年.

[3] 難波 誠, 微分積分学 (数学シリーズ), 裳華房, 1996 年.