

微分積分学II 講義ノート

柿澤 亮平

島根大学学術研究院 教育学系 数学科教育専攻

目次

第 1 章	積分と可積分条件	1
1.1	積分と Darboux の可積分条件	1
1.2	有界関数列の極限	6
1.3	連続関数列の極限	11
第 2 章	積分の基本性質	17
2.1	可積分関数と積分	17
2.2	連続関数と積分	19
2.3	可積分関数列の極限	22
第 3 章	広義積分の収束・発散	25
3.1	$[a, \infty)$ での広義積分	25
3.2	$(a, b]$ での広義積分	30
3.3	Gamma 関数と Beta 関数	35
3.4	領域の面積	37
3.5	曲線の長さ	39
第 4 章	級数の収束・発散	43
4.1	数列の上極限・下極限	43
4.2	級数とその収束判定法	45
4.3	級数の絶対収束・無条件収束	51
第 5 章	関数項級数, 整級数と実解析関数	55
5.1	関数項級数	55
5.2	整級数と実解析関数	59
5.3	初等関数の Taylor 級数	64

第1章 積分と可積分条件

1.1 積分とDarbouxの可積分条件

• 積分

定義 1.1.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする.

(1) $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ が $[a, b]$ の分割であるとは, Δ が

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

を満たすことを言う. また, $[a, b]$ の分割全体の集合を

$$\mathcal{D}([a, b]) = \{\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}; n \in \mathbb{N}, n \geq 1, a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

と書く.

(2) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対し,

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \quad (k \in \{1, \dots, n\})$$

を $[a, b]$ の Δ による小区間と言う. さらに,

$$d(I_k) = x_k - x_{k-1} \quad (k \in \{1, \dots, n\})$$

を I_k の直径と言い,

$$d(\Delta) = \max_{k \in \{1, \dots, n\}} d(I_k)$$

を Δ の幅と言う.

(3) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対し, $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ が Δ の代表点系であるとは, ξ が

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1, \quad \dots, \quad x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n$$

を満たすことを言う. また, Δ の代表点系全体の集合を

$$\mathcal{X}(\Delta) = \{\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}; x_0 \leq \xi_1 \leq x_1, \dots, x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n\}$$

と書く.

(4) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対し,

$$S(f; \Delta, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (\xi \in \mathcal{X}(\Delta))$$

によって定義される $S(f; \Delta, *) : \mathcal{X}(\Delta) \rightarrow \mathbb{R}$ を f の Δ による Riemann 和と言う.

定義 1.1.2 (ε - δ 論法). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする. $d(\Delta) \rightarrow +0$ のとき, $S(f; \Delta, *)$ が $R \in \mathbb{R}$ に $[a, b]$ で一様収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $d(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\sup_{\xi \in \mathcal{X}(\Delta)} |S(f; \Delta, \xi) - R| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} S(f; \Delta, *) = R$ と書く.

定義 1.1.2 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall \Delta \in \mathcal{D}([a, b]), \left(d(\Delta) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{\xi \in \mathcal{X}(\Delta)} |S(f; \Delta, \xi) - R| < \varepsilon \right).$$

定義 1.1.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする. f が $[a, b]$ で可積分であるとは,

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} S(f; \Delta, *) = R$$

となる $R \in \mathbb{R}$ が存在することを言う. このとき,

$$R = \int_{[a,b]} f(x) dx$$

と書き, $\int_{[a,b]} f(x) dx$ を f の $[a, b]$ での積分と言う.

注意. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $I = [a, b]$ とおくと, 1 は I で可積分であり,

$$\int_I 1 dx = b - a$$

が成り立つ. これより,

$$b - a = l(I)$$

と書き, $l(I)$ を I の長さと言う.

定義 1.1.4. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする. 任意の $a, b \in I$, $a \neq b$ に対し, f が $\{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\}$ で可積分のとき,

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x) dx & (a < b), \\ -\int_{[b,a]} f(x) dx & (a > b) \end{cases}$$

を f の $[a, b]$ または $[b, a]$ での定積分と言う.

● 上積分・下積分

定義 1.1.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする. 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対し,

$$\bar{S}(f; \Delta) = \sum_{k=1}^n \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)(x_k - x_{k-1}), \quad \underline{S}(f; \Delta) = \sum_{k=1}^n \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

をそれぞれ f の Δ による **Riemann 上限和**, **Riemann 下限和** と言う.

命題 1.1.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする.

(1) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\inf_{a \leq x \leq b} f(x)(b-a) \leq \underline{S}(f; \Delta) \leq \bar{S}(f; \Delta) \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x)(b-a)$$

が成り立つ.

(2) $\Delta \subseteq \Delta'$ を満たす任意の $\Delta, \Delta' \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\underline{S}(f; \Delta) \leq \underline{S}(f; \Delta'), \quad \bar{S}(f; \Delta) \geq \bar{S}(f; \Delta')$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 1.1.6. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする.

$$\bar{S}(f) = \inf_{\Delta \in \mathcal{D}([a, b])} \bar{S}(f; \Delta), \quad \underline{S}(f) = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}([a, b])} \underline{S}(f; \Delta)$$

をそれぞれ f の $[a, b]$ での**上積分**, **下積分** と言う.

命題 1.1.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする.

(1) 任意の $\Delta, \Delta' \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\underline{S}(f; \Delta) \leq \bar{S}(f; \Delta')$$

が成り立つ.

(2) $\underline{S}(f) \leq \bar{S}(f)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• Darboux の可積分条件

補題 1.1.1 (はさみうちの原理). $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする. $d(\Delta) \rightarrow +0$ のとき, $\underline{S}(f; \Delta), \overline{S}(f; \Delta)$ が $[a, b]$ で一様収束し, かつ $\lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} \underline{S}(f; \Delta) = \lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} \overline{S}(f; \Delta)$ ならば, f は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} \underline{S}(f; \Delta) = \lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} \overline{S}(f; \Delta)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 1.1.1 (Darboux の定理). $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とすると,

$$\lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} \underline{S}(f; \Delta) = \underline{S}(f), \quad \lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} \overline{S}(f; \Delta) = \overline{S}(f)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 1.1.2 (Darboux の可積分条件). $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とすると, 次の (i)–(iii) は互いに同値である.

(i) f は $[a, b]$ で可積分である.

(ii) $\lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} (\overline{S}(f; \Delta) - \underline{S}(f; \Delta)) = 0$.

(iii) $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$.

さらに, f が (i)–(iii) のいずれか一つを満たせば,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 区分求積法

命題 1.1.3 (区分求積法). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の可積分関数とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.1.4.

(1) $x < y$ を満たす任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$x < r < y$$

を満たす $r \in \mathbb{Q}$ が存在する.

(2) $x < y$ を満たす任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$x < s < y$$

を満たす $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

例. (Dirichlet 関数) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, \mathbb{R} 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

によって定義すると, $a, b \in \mathbb{Q}$ ならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n} = b-a$$

が成り立つが, f は $[a, b]$ で可積分でない.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

1.2 有界関数列の極限

● 関数空間

定義 1.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間とする. I 上関数全体の集合を

$$F(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$$

と書く.

定義 1.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間とする. I 上関数の**相等・加法・スカラー乗法**を

(1) (相等) $\forall f, g \in F(I), (f = g \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) = g(x)).$

(2) (加法) $\forall f, g \in F(I), (f + g)(x) = f(x) + g(x) (x \in I).$

(3) (スカラー乗法) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall f \in F(I), (af)(x) = af(x) (x \in I).$

によって定義する.

定義 1.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間とする. I 上関数の**零・逆**を

(1) (零) $0(x) = 0 (x \in I).$

(2) (逆) $\forall f \in F(I), (-f)(x) = -f(x) (x \in I).$

によって定義する.

命題 1.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間とすると, $F(I)$ は I 上関数の加法・スカラー乗法について**線型空間**である. つまり, 次の (i)–(viii) を満たす.

(i) $(f + g) + h = f + (g + h) (f, g, h \in F(I)).$

(ii) $\exists! 0 \in F(I), \forall f \in F(I), f + 0 = f = 0 + f.$

(iii) $\forall f \in F(I), \exists! -f \in F(I), f + (-f) = 0 = (-f) + f.$

(iv) $f + g = g + f (f, g \in F(I)).$

(v) $(ab)f = a(bf) (a, b \in \mathbb{R}, f \in F(I)).$

(vi) $1f = f (f \in F(I)).$

(vii) $(a + b)f = af + bf (a, b \in \mathbb{R}, f \in F(I)).$

(viii) $a(f + g) = af + ag (a \in \mathbb{R}, f, g \in F(I)).$

証明. 省略 (微分積分学 I). □

注意 (減法). (iii) の $f + (-g)$ を $f - g$ と書く.

● 有界関数空間

定義 1.2.4. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間とする.

(1) I 上有界関数全体の集合を

$$R^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ は } I \text{ で有界である} \}$$

と書く.

(2) 任意の $f \in R^\infty(I)$ に対し,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

を f の I での**上限ノルム**と言う.

命題 1.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間とすると, $R^\infty(I)$ は $F(I)$ の**部分空間**である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $0 \in R^\infty(I)$.

(ii) $f, g \in R^\infty(I) \Rightarrow f + g \in R^\infty(I)$.

(iii) $c \in \mathbb{R}, f \in R^\infty(I) \Rightarrow cf \in R^\infty(I)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間とすると, $(R^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$ は**ノルム空間**である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall f \in R^\infty(I), (\|f\|_\infty \geq 0) \wedge (\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0)$.

(ii) (三角不等式) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ ($f, g \in R^\infty(I)$).

(iii) $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty$ ($c \in \mathbb{R}, f \in R^\infty(I)$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 関数列の各点収束・一様収束

定義 1.2.5. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間とする. $f: \mathbb{N} \rightarrow F(I)$ を $F(I)$ の関数列と言う. このとき,

$$f(n) = f_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

と書き, f_n を $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項と言う.

定義 1.2.6. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列とする. $n \rightarrow \infty$ のとき, f_n が $f \in F(I)$ に I で各点収束するとは, 任意の $x \in I$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

となることを言う.

定義 1.2.6 の論理式

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N(x, \varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

例. $F([0, 1])$ の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 2}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{n}\right), \\ 2n - n^2 x & \left(\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}\right), \\ 0 & \left(\frac{2}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \geq 2}$ は 0 に $[0, 1]$ で各点収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 1.2.7. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間とする. $f: \mathbb{N} \rightarrow R^\infty(I)$ を $R^\infty(I)$ の関数列と言う. このとき,

$$f(n) = f_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

と書き, f_n を $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項と言う.

定義 1.2.8. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列とする. $n \rightarrow \infty$ のとき, f_n が $f \in F(I)$ に I で一様収束するとは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

となることを言う.

定義 1.2.8 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon).$$

例. $F(\mathbb{R})$ の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 2}$ を

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\log n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \geq 2}$ は 0 に \mathbb{R} で一様収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.2.4 (一様収束の強弱). $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列とすると, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $f \in F(I)$ に I で一様収束すれば, f_n は f に I で各点収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $F([0, 1])$ の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 2}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{n}\right), \\ 2n - n^2 x & \left(\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}\right), \\ 0 & \left(\frac{2}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \geq 2}$ は 0 に $[0, 1]$ で各点収束するが, 一様収束しない.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.2.5 (一様収束の閉性). $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列とすると, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $f \in F(I)$ に I で一様収束すれば, $f \in R^\infty(I)$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● Cauchy の定理

定義 1.2.9. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列とする. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $R^\infty(I)$ に収束するとは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

となる $f \in R^\infty(I)$ が存在することを言う.

定義 1.2.10. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列とする. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $R^\infty(I)$ の Cauchy 列であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $m, n \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 1.2.10 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, (m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon).$$

命題 1.2.6. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間とすると, $R^\infty(I)$ の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $R^\infty(I)$ に収束すれば, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $R^\infty(I)$ の Cauchy 列である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 1.2.1 (Cauchy の定理). $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間とすると, $R^\infty(I)$ の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $R^\infty(I)$ の Cauchy 列ならば, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $R^\infty(I)$ に収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

1.3 連続関数列の極限

● 連続関数

定義 1.3.1. $I \subset \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

(1) f が $a \in I$ で連続であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

となることを言う.

(2) f が I で連続であるとは, f が任意の $a \in I$ で連続であることを言う.

定義 1.3.1(2) の論理式

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(a, \varepsilon) > 0, \forall x \in I, (|x - a| < \delta(a, \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

例. $f \in F((0, \infty))$ を

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

によって定義すると, f は $(0, \infty)$ で連続である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

● 一様連続関数

定義 1.3.2 (ε - δ 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする. f が I で一様連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x, y \in I$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 1.3.2 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, y \in I, (|x - y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

命題 1.3.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とするとき, f が I で一様連続ならば, f は I で連続である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

例. $f, g \in F(\mathbb{R})$ を

$$f(x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$g(x) = \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義すると, f, g は \mathbb{R} で一様連続である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 1.3.1 (Heine-Cantor の定理). $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とするとき, f が $[a, b]$ で連続ならば, f は $[a, b]$ で一様連続である.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

例. $f \in F((0, \infty))$ を

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

によって定義すると, f は $(0, \infty)$ で連続であるが, 一様連続でない.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

● 連続関数空間

定義 1.3.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする.

(1) $[a, b]$ 上連続関数全体の集合を

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ は } [a, b] \text{ で連続である}\}$$

と書く.

(2) 任意の $f \in C([a, b])$ に対し,

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

を f の $[a, b]$ での**最大ノルム**と言う.

$R^\infty([a, b])$, $C([a, b])$ の包含関係

$$C([a, b]) \subsetneq R^\infty([a, b]).$$

命題 1.3.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とすると, $C([a, b])$ は $F([a, b])$ の部分空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $0 \in C([a, b])$.

(ii) $f, g \in C([a, b]) \Rightarrow f + g \in C([a, b])$.

(iii) $c \in \mathbb{R}$, $f \in C([a, b]) \Rightarrow cf \in C([a, b])$.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

命題 1.3.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とすると, $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall f \in C([a, b]), (\|f\|_\infty \geq 0) \wedge (\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0)$.

(ii) (三角不等式) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ ($f, g \in C([a, b])$).

(iii) $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty$ ($c \in \mathbb{R}$, $f \in C([a, b])$).

証明. 省略 (命題 1.2.3). □

定義 1.3.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする. $f : \mathbb{N} \rightarrow C([a, b])$ を $C([a, b])$ の**関数列**と言う. このとき,

$$f(n) = f_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

と書き, f_n を $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の**一般項**と言う.

命題 1.3.4 (一様収束の閉性). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $C([a, b])$ の関数列とすると, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $f \in F([a, b])$ に $[a, b]$ で一様収束すれば, $f \in C([a, b])$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $C([a, b])$ の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$f_n(x) = \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^n \quad (a \leq x \leq b)$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (a \leq x < b), \\ 1 & (x = b) \end{cases}$$

に $[a, b]$ で各点収束するが, 一様収束しない.

● Cauchy の定理

定義 1.3.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $C([a, b])$ の関数列とする. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $C([a, b])$ に収束するとは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

となる $f \in C([a, b])$ が存在することを言う.

定義 1.3.6. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $C([a, b])$ の関数列とする. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $C([a, b])$ の Cauchy 列であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $m, n \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 1.3.6 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, (m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon).$$

命題 1.3.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, $C([a, b])$ の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $C([a, b])$ に収束すれば, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $C([a, b])$ の Cauchy 列である.

証明. 省略 (命題 1.2.6). □

定理 1.3.2 (Cauchy の定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, $C([a, b])$ の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $C([a, b])$ の Cauchy 列ならば, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $C([a, b])$ に収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 連続関数の可積分性

定義 1.3.7. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする.

$$\omega(f; I) = \sup_{x, y \in I} |f(x) - f(y)|$$

を f の I での振幅と言う.

命題 1.3.6. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の有界関数とする.

(1) $\omega(f; I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$.

(2) ($I = [a, b]$) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\bar{S}(f; \Delta) - \underline{S}(f; \Delta) = \sum_{k=1}^n \omega(f; [x_{k-1}, x_k]) (x_k - x_{k-1})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 1.3.3 (連続関数の可積分性). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とすると, f が $[a, b]$ で連続ならば, f は $[a, b]$ で可積分である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第2章 積分の基本性質

2.1 可積分関数と積分

命題 2.1.1 (和・スカラー倍の可積分性). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) f, g が $[a, b]$ で可積分ならば, $f + g$ は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

が成り立つ.

(2) f が $[a, b]$ で可積分ならば, cf は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.1.2 (積・商の可積分性). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とする.

(1) f, g が $[a, b]$ で可積分ならば, fg は $[a, b]$ で可積分である.

(2) f, g が $[a, b]$ で可積分であり, かつ $\frac{1}{g}$ が $[a, b]$ で有界ならば, $\frac{f}{g}$ は $[a, b]$ で可積分である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.1.3 (積分の単調性). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とするとき, $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, かつ f, g が $[a, b]$ で可積分ならば,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.1.4 (積分の三角不等式). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とするとき, f が $[a, b]$ で可積分ならば, $|f|$ は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.1.5 (Schwarz の不等式). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とすると, f, g が $[a, b]$ で可積分ならば, $|fg|, f^2, g^2$ は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.1.6 (積分の有限加法性). $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$, $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, c]$ 上の有界関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は $[a, c]$ で可積分である.

(ii) f は $[a, b], [b, c]$ で可積分である.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

2.2 連続関数と積分

命題 2.2.1 (積分の強単調性). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の連続関数とするととき, $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, かつ $\exists x_0 \in [a, b]$, $f(x_0) < g(x_0)$ ならば,

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.2.2 (積分の非退化性). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の連続関数とするととき, f が

$$\int_a^b |f(x)|dx = 0$$

を満たせば, $f = 0$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $[a, b]$ 上の関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (a \leq x < b), \\ 1 & (x = b) \end{cases}$$

によって定義すると, f は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b |f(x)|dx = 0$$

を満たすが, $f \neq 0$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.2.1 (微分積分学の基本定理). $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の有界閉区間, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

(1) (原始関数) f が I で微分可能であり, かつ f' が I で可積分ならば, 任意の $a, b \in I$, $a \neq b$ に対して

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

が成り立つ.

(2) (不定積分) f が I で可積分であり, かつ f が $b \in I$ で連続ならば, 任意の $a \in I$ に対し,

$$F(x) = \int_a^x f(u)du \quad (x \in I)$$

によって定義される $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ は b で微分可能であり, $F'(b) = f(b)$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.2.2 (置換積分法). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の微分可能関数で, $\varphi' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が $[a, b]$ で可積分であるものとする. $c = \varphi(a)$, $d = \varphi(b)$ とおき, $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[c, d]$ 上の連続関数とすると, $(f \circ \varphi)\varphi'$ は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^b (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.2.3 (部分積分法). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の微分可能関数とすると, f', g' が $[a, b]$ で可積分ならば, $fg', f'g$ は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (Wallis 積分).

(1) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$) とおくと,

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & (n : \text{偶数}), \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

が成り立つ. ただし,

$$(-1)!! = 1, \quad 0!! = 1, \quad n!! = \begin{cases} n(n-2)\cdots 4 \cdot 2 & (n : \text{偶数}), \\ n(n-2)\cdots 3 \cdot 1 & (n : \text{奇数}). \end{cases}$$

(2) $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$) とおくと,

$$J_n = I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & (n : \text{偶数}), \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.2.3 (Wallis の公式 I). 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を

$$a_n = \frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

によって定義すると, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{2}$ となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 2.2.4 (Wallis の公式 II). 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義すると, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}a_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

2.3 可積分関数列の極限

● 可積分関数空間

定義 2.3.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする.

(1) $[a, b]$ 上可積分関数全体の集合を

$$R^1([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ は } [a, b] \text{ で可積分である}\}$$

と書く.

(2) 任意の $f \in R^1([a, b])$ に対し,

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

を f の $[a, b]$ での上限ノルムと言う.

$R^\infty([a, b])$, $C([a, b])$, $R^1([a, b])$ の包含関係

$$C([a, b]) \subsetneq R^1([a, b]) \subsetneq R^\infty([a, b]).$$

命題 2.3.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とすると, $R^1([a, b])$ は $F([a, b])$ の部分空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $0 \in R^1([a, b])$.

(ii) $f, g \in R^1([a, b]) \Rightarrow f + g \in R^1([a, b])$.

(iii) $c \in \mathbb{R}$, $f \in R^1([a, b]) \Rightarrow cf \in R^1([a, b])$.

証明. 省略 (命題 2.1.1). □

命題 2.3.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とすると, $(R^1([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall f \in R^1([a, b]), (\|f\|_\infty \geq 0) \wedge (\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0)$.

(ii) (三角不等式) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ ($f, g \in R^1([a, b])$).

(iii) $\|cf\|_\infty = |c|\|f\|_\infty$ ($c \in \mathbb{R}$, $f \in R^1([a, b])$).

証明. 省略 (命題 1.2.3). □

定義 2.3.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする. $f : \mathbb{N} \rightarrow R^1([a, b])$ を $R^1([a, b])$ の関数列と言う. このとき,

$$f(n) = f_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

と書き, f_n を $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項と言う.

命題 2.3.3 (一様収束の閉性). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^1([a, b])$ の関数列とすると, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $f \in F([a, b])$ に $[a, b]$ で一様収束すれば, $f \in R^1([a, b])$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● Cauchy の定理

定義 2.3.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^1([a, b])$ の関数列とする. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $R^1([a, b])$ に収束するとは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

となる $f \in R^1([a, b])$ が存在することを言う.

定義 2.3.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^1([a, b])$ の関数列とする. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $R^1([a, b])$ の **Cauchy 列** であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $m, n \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 2.3.4 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, (m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon).$$

命題 2.3.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, $R^1([a, b])$ の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $R^1([a, b])$ に収束すれば, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $R^1([a, b])$ の Cauchy 列である.

証明. 省略 (命題 1.2.6). □

定理 2.3.1 (Cauchy の定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, $R^1([a, b])$ の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $R^1([a, b])$ の Cauchy 列ならば, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $R^1([a, b])$ に収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 項別微積分定理

定理 2.3.2 (項別積分定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^1([a, b])$ の関数列とすると、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $f \in F([a, b])$ に $[a, b]$ で一様収束すれば、 $f \in R^1([a, b])$ であり、

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

が成り立つ。

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.3.3 (項別微分定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし、

$$C^1([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ は } [a, b] \text{ で } C^1 \text{ 級である} \}$$

とおく. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $C^1([a, b])$ の関数列とすると、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $f \in F([a, b])$ に $[a, b]$ で各点収束し、かつ $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $g \in F([a, b])$ に $[a, b]$ で一様収束すれば、 $f \in C^1([a, b])$, $g \in C([a, b])$ であり、

$$f'(x) = g(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つ。

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第3章 広義積分の収束・発散

3.1 $[a, \infty)$ での広義積分

● 関数の上極限・下極限

定義 3.1.1. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数とする.

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \geq M} f(x) \right), \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\inf_{x \geq M} f(x) \right)$$

をそれぞれ f の $x \rightarrow \infty$ での上極限, 下極限と言う.

注意. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数とすると, f の $x \rightarrow \infty$ での上極限・下極限は

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x), \liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

として存在する.

命題 3.1.1. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数とすると,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 3.1.1. $a \in \mathbb{R}$, $F : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, $F([a, \infty)) = \{F(M) ; M \geq a\} \subseteq \mathbb{R}$ とおくとき, $\alpha = \inf_{M \geq a} F(M)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) α は $F([a, \infty))$ の下界である.

(ii) 任意の $y > \alpha$ に対し, $y > F(M(y))$ を満たす $M(y) \geq a$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

補題 3.1.2. $a \in \mathbb{R}$, $F : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, $F([a, \infty)) = \{F(M) ; M \geq a\} \subseteq \mathbb{R}$ とおくとき, $\alpha = \sup_{M \geq a} F(M)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) α は $F([a, \infty))$ の上界である.

(ii) 任意の $y < \alpha$ に対し, $y < F(M(y))$ を満たす $M(y) \geq a$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 3.1.1. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数とすると,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \inf_{M \geq a} \left(\sup_{x \geq M} f(x) \right), \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sup_{M \geq a} \left(\inf_{x \geq M} f(x) \right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 3.1.3. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

- (i) 任意の $y > \alpha$ に対してある $M(y) \geq a$ が存在し, 任意の $x \geq M(y)$ に対して $y > f(x)$ が成り立つ.
- (ii) 任意の $y < \alpha$, $M \geq a$ に対し, $y < f(x(y, M))$ を満たす $x(y, M) \geq M$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 3.1.4. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \liminf_{x \rightarrow \infty} f(x)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

- (i) 任意の $y < \alpha$ に対してある $M(y) \geq a$ が存在し, 任意の $x \geq M(y)$ に対して $y < f(x)$ が成り立つ.
- (ii) 任意の $y > \alpha$, $M \geq a$ に対し, $y > f(x(y, M))$ を満たす $x(y, M) \geq M$ が存在する.

証明. 省略 (補題 3.1.3). □

定理 3.1.2. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $x \rightarrow \infty$ のとき, $f(x)$ は収束する.
- (ii) $\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) = \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) = \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x)$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. f の $x \rightarrow -\infty$ での上極限 $\limsup_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ・ 下極限 $\liminf_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ も, 定義 3.1.1 と同様に定義される.

● 広義積分

定義 3.1.2. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数とする. f が $[a, \infty)$ で**広義可積分**であるとは, f が次の (i), (ii) を満たすことを言う.

(i) 任意の $v > a$ に対して f は $[a, v]$ で可積分である.

(ii) $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v f(x) dx$ は収束する.

このとき,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx$$

と書き, $\int_a^{\infty} f(x) dx$ を f の $[a, \infty)$ での**広義積分**と言う.

注意. $[a, \infty)$ での広義積分に対しても, 積分の基本性質が成り立つ.

命題 3.1.2. $a > 0$ とすると, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \infty & (\alpha \leq 1), \\ \frac{1}{(\alpha - 1)a^{\alpha-1}} & (\alpha > 1) \end{cases}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 広義積分の収束判定法

命題 3.1.3 (比較判定法). $a \in \mathbb{R}$, $f, g : [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を定義 3.1.2(i) を満たす $[a, \infty)$ 上の正値関数とする.

(1) $0 \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$, かつ $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v g(x) dx$ が収束すれば, $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v f(x) dx$ は収束する.

(2) $0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \infty$, かつ $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v g(x) dx$ が発散すれば, $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v f(x) dx$ は発散する.

(3) $0 < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ ならば, $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v f(x) dx$, $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v g(x) dx$ は共に収束するか, または発散する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 3.1.4 (次数判定法). $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を定義 3.1.2(i) を満たす $[a, \infty)$ 上の正値関数とする.

(1) $0 \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) < \infty$ を満たす $\alpha > 1$ が存在すれば, $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v f(x) dx$ は収束する.

(2) $0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) \leq \infty$ を満たす $\alpha \leq 1$ が存在すれば, $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v f(x) dx$ は発散する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 広義積分の絶対収束・条件収束

定義 3.1.3. $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を定義 3.1.2(i) を満たす $[a, \infty)$ 上の関数とする.

(1) $\int_a^\infty f(x)dx$ が絶対収束するとは, $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v |f(x)|dx$ が収束することを言う.

(2) $\int_a^\infty f(x)dx$ が条件収束するとは, $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v f(x)dx$ が収束し, $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v |f(x)|dx$ が発散することを言う.

補題 3.1.5. $a \in \mathbb{R}$, $F : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, \infty)$ 上の関数とすると, 次 (i), (ii) は同値である.

(i) $\lim_{v \rightarrow \infty} F(v)$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \geq a$ が存在し, 任意の $u, v > N(\varepsilon)$ に対して

$$|F(v) - F(u)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 3.1.3 (Cauchy の収束判定法). $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を定義 3.1.2(i) を満たす $[a, \infty)$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_a^v f(x)dx$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \geq a$ が存在し, 任意の $u, v > N(\varepsilon)$ に対して

$$\left| \int_u^v f(x)dx \right| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 3.1.5 (広義積分の三角不等式). $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を定義 3.1.2(i) を満たす $[a, \infty)$ 上の関数とすると, $\int_a^\infty f(x)dx$ が絶対収束すれば, $\int_a^\infty f(x)dx$ は収束し,

$$\left| \int_a^\infty f(x)dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. f の $(-\infty, b]$ での広義積分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ とその絶対収束・条件収束も, 定義 3.1.2, 定義 3.1.3 と同様に定義される.

3.2 $(a, b]$ での広義積分

• 関数の上極限・下極限

定義 3.2.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数とする.

$$\limsup_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\sup_{a < x \leq a+\delta} f(x) \right), \quad \liminf_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\inf_{a < x \leq a+\delta} f(x) \right)$$

をそれぞれ f の $x \rightarrow a+0$ での上極限, 下極限と言う.

注意. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数とすると, f の $x \rightarrow a+0$ での上極限・下極限は

$$\limsup_{x \rightarrow a+0} f(x), \liminf_{x \rightarrow a+0} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

として存在する.

命題 3.2.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数とすると,

$$\liminf_{x \rightarrow a+0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 3.1.1). □

補題 3.2.1. $c > 0$, $F : (0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ を $(0, c]$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, $F((0, c]) = \{F(\delta) ; 0 < \delta \leq c\} \subseteq \mathbb{R}$ とおくとき, $\alpha = \inf_{0 < \delta \leq c} F(\delta)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) α は $F((0, c])$ の下界である.

(ii) 任意の $y > \alpha$ に対し, $y > F(\delta(y))$ を満たす $0 < \delta(y) \leq c$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

補題 3.2.2. $c > 0$, $F : (0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ を $(0, c]$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, $F((0, c]) = \{F(\delta) ; 0 < \delta \leq c\} \subseteq \mathbb{R}$ とおくとき, $\alpha = \sup_{0 < \delta \leq c} F(\delta)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) α は $F((0, c])$ の上界である.

(ii) 任意の $y < \alpha$ に対し, $y < F(\delta(y))$ を満たす $0 < \delta(y) \leq c$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 3.2.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数とすると,

$$\limsup_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf_{0 < \delta \leq b-a} \left(\sup_{a < x \leq a+\delta} f(x) \right), \quad \liminf_{x \rightarrow a+0} f(x) = \sup_{0 < \delta \leq b-a} \left(\inf_{a < x \leq a+\delta} f(x) \right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (定理 3.1.1). □

補題 3.2.3. $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \limsup_{x \rightarrow a+0} f(x)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 任意の $y > \alpha$ に対してある $0 < \delta(y) \leq b - a$ が存在し, 任意の $a < x \leq a + \delta(y)$ に対して $y > f(x)$ が成り立つ.

(ii) 任意の $y < \alpha, 0 < \delta \leq b - a$ に対し, $y < f(x(y, \delta))$ を満たす $a < x(y, \delta) \leq b$ が存在する.

証明. 省略 (補題 3.1.3). □

補題 3.2.4. $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \liminf_{x \rightarrow a+0} f(x)$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 任意の $y < \alpha$ に対してある $0 < \delta(y) \leq b - a$ が存在し, 任意の $a < x \leq a + \delta(y)$ に対して $y < f(x)$ が成り立つ.

(ii) 任意の $y > \alpha, 0 < \delta \leq b - a$ に対し, $y > f(x(y, \delta))$ を満たす $a < x(y, \delta) \leq b$ が存在する.

証明. 省略 (補題 3.1.4). □

定理 3.2.2. $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $x \rightarrow a + 0$ のとき, $f(x)$ は収束する.

(ii) $\liminf_{x \rightarrow a+0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow a+0} f(x) \in \mathbb{R}$.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \liminf_{x \rightarrow a+0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow a+0} f(x)$ が成り立つ.

証明. 省略 (定理 3.1.2). □

注意. f の $x \rightarrow b - 0$ での上極限 $\limsup_{x \rightarrow b-0} f(x)$ ・ 下極限 $\liminf_{x \rightarrow b-0} f(x)$ も, 定義 3.2.1 と同様に定義される.

● 広義積分

定義 3.2.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数とする. f が $(a, b]$ で**広義可積分**であるとは, f が次の (i), (ii) を満たすことを言う.

(i) 任意の $a < u < b$ に対して f は $[u, b]$ で可積分である.

(ii) $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b f(x) dx$ は収束する.

このとき,

$$\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

と書き, $\int_a^b f(x) dx$ を f の $(a, b]$ での**広義積分**と言う.

注意. $(a, b]$ での広義積分に対しても, 積分の基本性質が成り立つ.

命題 3.2.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とすると, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & (\alpha < 1), \\ \infty & (\alpha \geq 1) \end{cases}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 広義積分の収束判定法

命題 3.2.3 (比較判定法). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : (a, b] \rightarrow (0, \infty)$ を定義 3.2.2(i) を満たす $(a, b]$ 上の正値関数とする.

(1) $0 \leq \limsup_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$, かつ $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b g(x) dx$ が収束すれば, $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b f(x) dx$ は収束する.

(2) $0 < \liminf_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \infty$, かつ $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b g(x) dx$ が発散すれば, $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b f(x) dx$ は発散する.

(3) $0 < \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ ならば, $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b f(x) dx$, $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b g(x) dx$ は共に収束するか, または発散する.

証明. 省略 (命題 3.1.3). □

命題 3.2.4 (次数判定法). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \rightarrow (0, \infty)$ を定義 3.2.2(i) を満たす $(a, b]$ 上の正値関数とする.

(1) $0 \leq \limsup_{x \rightarrow a+0} (x-a)^\alpha f(x) < \infty$ を満たす $\alpha < 1$ が存在すれば, $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b f(x) dx$ は収束する.

(2) $0 < \liminf_{x \rightarrow a+0} (x-a)^\alpha f(x) \leq \infty$ を満たす $\alpha \geq 1$ が存在すれば, $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b f(x) dx$ は発散する.

証明. 省略 (命題 3.1.4). □

● 広義積分の絶対収束・条件収束

定義 3.2.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を定義 3.2.2(i) を満たす $(a, b]$ 上の関数とする.

(1) $\int_a^b f(x)dx$ が絶対収束するとは, $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b |f(x)|dx$ が収束することを言う.

(2) $\int_a^b f(x)dx$ が条件収束するとは, $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b f(x)dx$ が収束し, $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b |f(x)|dx$ が発散することを言う.

補題 3.2.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $F : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\lim_{u \rightarrow a+0} F(u)$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $0 < \delta(\varepsilon) \leq b - a$ が存在し, 任意の $a < u, v < a + \delta(\varepsilon)$ に対して

$$|F(v) - F(u)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 3.2.3 (Cauchy の収束判定法). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を定義 3.2.2(i) を満たす $(a, b]$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b f(x)dx$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $0 < \delta(\varepsilon) \leq b - a$ が存在し, 任意の $a < u, v < a + \delta(\varepsilon)$ に対して

$$\left| \int_u^v f(x)dx \right| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (定理 3.1.3). □

命題 3.2.5 (広義積分の三角不等式). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を定義 3.2.2(i) を満たす $(a, b]$ 上の関数とすると, $\int_a^b f(x)dx$ が絶対収束すれば, $\int_a^b f(x)dx$ は収束し,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 3.1.5). □

注意. f の $[a, b]$ での広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ とその絶対収束・条件収束も, 定義 3.2.2, 定義 3.2.3 と同様に定義される.

3.3 Gamma関数とBeta関数

• Gamma関数

命題 3.3.1. 任意の $x > 0$ に対して

$$\lim_{u \rightarrow +0} \int_u^1 t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_1^v t^{x-1} e^{-t} dt$$

は収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.3.1.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

によって定義される $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を **Gamma関数** と言う.

注意. 任意の $x > 0$ に対して

$$\lim_{u \rightarrow +0} \int_u^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \lim_{v \rightarrow \infty} \int_1^v t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

が成り立つ.

命題 3.3.2. $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を Gamma関数とする.

- (1) $\Gamma(x) > 0$ ($x > 0$).
- (2) $\Gamma(1) = 1$.
- (3) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ($x > 0$).
- (4) $\Gamma(n+1) = n!$ ($n \in \mathbb{N}$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• Beta 関数

命題 3.3.3. 任意の $x, y > 0$ に対して

$$\lim_{u \rightarrow +0} \int_u^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad \lim_{v \rightarrow 1-0} \int_{\frac{1}{2}}^v t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

は収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.3.2.

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (x, y > 0)$$

によって定義される $B : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を **Beta 関数** と言う.

注意. 任意の $x, y > 0$ に対して

$$\lim_{u \rightarrow +0} \int_u^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt + \lim_{v \rightarrow 1-0} \int_{\frac{1}{2}}^v t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

が成り立つ.

命題 3.3.4. $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を Gamma 関数, $B : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を Beta 関数とする.

(1) $B(x, y) = B(y, x) \quad (x, y > 0)$.

(2) $B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 1)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

3.4 領域の面積

● 縦線閉領域の面積

定義 3.4.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の可積分関数で, $\varphi \leq \psi$, つまり, $\forall x \in [a, b]$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ を満たすものとする.

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ を \mathbb{R}^2 の**縦線閉領域**と言う.

(2) $a(D) = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx$ を D の**面積**と言う.

例 (楕円領域). $a, b > 0$ とし, $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$ とおくと,

$$a(D) = \pi ab$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.4.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の有界閉でない区間, $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の広義可積分関数で, $\varphi \leq \psi$, つまり, $x \in I$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ を満たすものとする.

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in I, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ を \mathbb{R}^2 の**広義縦線閉領域**と言う.

(2) $a(D) = \int_I (\psi(x) - \varphi(x))dx$ を D の**面積**と言う.

例 (層状領域). $a > 0$ とし, $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{x^2 + a^2} \leq y \leq \frac{1}{x^2 + a^2} \right\}$ とおくと,

$$a(D) = \frac{2\pi}{a}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 極閉領域の面積

定義 3.4.3. 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対し,

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

によって定義される $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ を (x, y) の極座標と言ひ,

$$\arg(x, y) = \theta$$

を (x, y) の偏角 (argument) と言ふ. $(x, y) = (0, 0)$ に対しては, $r = 0$ によって定義し, θ は定義しない.

例 (レムニスケート). $a > 0$ とし, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\}$ とおく. D を極座標 (r, θ) で表すと,

$$D = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] ; 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 = 2a^2 \cos 2\theta\}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.4.4. $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$, $\alpha < \beta$, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \infty)$ を $[\alpha, \beta]$ 上の非負値可積分関数とする.

(1) $D = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] ; \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq \varphi(\theta)\}$ を \mathbb{R}^2 の極閉領域と言ふ.

(2) $a(D) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\theta)^2 d\theta$ を D の面積と言ふ.

例 (レムニスケート). $a > 0$ とし, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\}$ とおくと,

$$a(D) = 2a^2$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

3.5 曲線の長さ

• C^1 級パラメータ曲線

定義 3.5.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の C^1 級関数とする.

(1) $(x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線と言う.

(2) $C = \{(x(t), y(t)) ; a \leq t \leq b\}$ を (x, y) の跡と言う.

定義 3.5.2. $k \in \{0, 1\}$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$, $(x_k, y_k) : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とする. (x_0, y_0) が (x_1, y_1) に向きを込めて C^1 級同値であるとは, 次の (i), (ii) を満たす $[a_0, b_0]$ 上の C^1 級関数 $\varphi : [a_0, b_0] \rightarrow [a_1, b_1]$ が存在することを言う.

(i) $\varphi(a_0) = a_1$, $\varphi(b_0) = b_1$, $\varphi'(t) > 0$ ($a_0 \leq t \leq b_0$).

(ii) $x_0(t) = (x_1 \circ \varphi)(t)$, $y_0(t) = (y_1 \circ \varphi)(t)$ ($a_0 \leq t \leq b_0$).

このとき, $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ と書く.

命題 3.5.1. \sim は \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線の同値関係である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) (反射律) $(x, y) \sim (x, y)$.

(ii) (対称律) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Rightarrow (x_1, y_1) \sim (x_0, y_0)$.

(iii) (推移律) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Rightarrow (x_0, y_0) \sim (x_2, y_2)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.5.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とする.

(1) $[(x, y)] = \{(\xi, \eta) ; (x, y) \sim (\xi, \eta)\}$ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級曲線と言う.

(2) $C = \{(x(t), y(t)) ; a \leq t \leq b\}$ を $[(x, y)]$ の跡と言う.

• C^1 級パラメータ曲線の長さ

命題 3.5.2 (曲線の長さの well-definedness). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とすると, 任意の $(\xi, \eta) \in [(x, y)]$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $(\xi, \eta) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_c^d \sqrt{\xi'(u)^2 + \eta'(u)^2} du$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.5.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級パラメータ曲線とし, $C = \{(x(t), y(t)) ; a \leq t \leq b\}$ とおく.

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

を C の長さと言う.

注意 (命題 3.5.2). \mathbb{R}^2 上の向き付けられた C^1 級曲線の長さは, パラメータの選択に依存しない.

例 (サイクロイド). $a > 0$ とし, $C = \{(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)) ; 0 \leq t \leq 2\pi\}$ とおくと,

$$l(C) = 8a$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 直交座標上の C^1 級曲線の長さ

定義 3.5.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の C^1 級関数とする.

$$G(\varphi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b, y = \varphi(x)\}$$

を φ のグラフと言う.

命題 3.5.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の C^1 級関数とすると,

$$l(G(\varphi)) = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (放物線). $a, p > 0$ とし, $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq a, y = \frac{x^2}{4p} \right\}$ とおくと,

$$l(C) = \frac{1}{2} \left\{ a \sqrt{\frac{a^2}{4p^2} + 1} + 2p \log \left(\frac{a}{2p} + \sqrt{\frac{a^2}{4p^2} + 1} \right) \right\}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 極座標上の C^1 級曲線の長さ

定義 3.5.6. $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$, $\alpha < \beta$, $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \infty)$ を $[\alpha, \beta]$ 上の非負値 C^1 級関数とする.

$$G(\varphi) = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] ; \alpha \leq \theta \leq \beta, r = \varphi(\theta)\}$$

を φ のグラフと言う.

命題 3.5.4. $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$, $\alpha < \beta$, $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \infty)$ を $[\alpha, \beta]$ 上の非負値 C^1 級関数とすると,

$$l(G(\varphi)) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi(\theta)^2 + \varphi'(\theta)^2} d\theta$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (カージオイド). $a > 0$ とし, $C = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] ; 0 \leq \theta \leq 2\pi, r = a(1 + \cos \theta)\}$ とおくと,

$$l(C) = 8a$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第4章 級数の収束・発散

4.1 数列の上極限・下極限

定義 4.1.1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} a_m \right), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} a_m \right)$$

をそれぞれ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の上極限, 下極限と言う.

注意. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の上極限・下極限は

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

として存在する.

命題 4.1.1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 4.1.1. $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, $A(\mathbb{N}) = \{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ とおくとき, $\alpha = \inf_{n \in \mathbb{N}} A_n$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) α は $A(\mathbb{N})$ の下界である.

(ii) 任意の $x > \alpha$ に対し, $x > A_{N(x)}$ を満たす $N(x) \in \mathbb{N}$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

補題 4.1.2. $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, $A(\mathbb{N}) = \{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ とおくとき, $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) α は $A(\mathbb{N})$ の上界である.

(ii) 任意の $x < \alpha$ に対し, $x < A_{N(x)}$ を満たす $N(x) \in \mathbb{N}$ が存在する.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 4.1.1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{m \geq n} a_m \right), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{m \geq n} a_m \right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 4.1.3. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 任意の $x > \alpha$ に対してある $N(x) \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $m \geq N(x)$ に対して $x > a_m$ が成り立つ.

(ii) 任意の $x < \alpha$, $N \in \mathbb{N}$ に対し, $x < a_{m(x,N)}$ を満たす $m(x, N) \geq N$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 4.1.4. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

(i) 任意の $x < \alpha$ に対してある $N(x) \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $m \geq N(x)$ に対して $x < a_m$ が成り立つ.

(ii) 任意の $x > \alpha$, $N \in \mathbb{N}$ に対し, $x > a_{m(x,N)}$ を満たす $m(x, N) \geq N$ が存在する.

証明. 省略 (補題 4.1.3). □

定理 4.1.2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する.

(ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$.

さらに, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

4.2 級数とその収束判定法

● 級数

定義 4.2.1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

によって定義される $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の**級数**と言ひ, S_N を $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ の第 N **部分和**と言う.

定義 4.2.2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の級数とする.

(1) $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ が $S \in \mathbb{R}$ に**収束**するとは,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$$

となることを言う. このとき, $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と書き, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ の**和**と言う.

(2) $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ が ∞ (または $-\infty$) に**発散**するとは,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \infty \quad \left(\text{または} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = -\infty \right)$$

となることを言う. このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ (または $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$) と書く.

注意. 数列の有限個の項を付け加えたり取り除いたりしても, その級数の収束・発散には関係しない.

命題 4.2.1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とするとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.2.1 (Cauchy の収束判定法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $M, N \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $M, N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - \sum_{n=0}^M a_n \right| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. 命題 4.2.1 の逆は成り立たない.

例 (調和級数). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.2.2 (和・スカラー倍の級数). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ は収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

が成り立つ.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)$ は収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 級数の収束判定法 I

定義 4.2.3. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列 ($\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$) とする.

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

によって定義される $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の**正項級数**と言ひ, S_N を $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ の第 N 部分和と言う.

命題 4.2.3 (比較判定法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とする.

(1) $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, かつ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \infty$, かつ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が発散すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

(3) $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は共に収束するか, または発散する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.2.4 (d'Alembert の収束判定法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とする.

(1) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ は収束する.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ は収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.2.5 (Cauchy の収束判定法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とする.

(1) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ は収束する.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ は収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 級数の収束判定法 II

命題 4.2.6 (Euler-Maclaurin の不等式). $a \in \mathbb{N}$, $f : [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を $[a, \infty)$ 上の単調減少正値関数とすると, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $N \geq a$ に対して

$$\int_a^N f(x)dx + f(N) \leq \sum_{n=a}^N f(n) \leq f(a) + \int_a^N f(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (Euler の不等式). 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して

$$\frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \leq 1$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.2.2 (Euler-Maclaurin の収束判定法). $a \in \mathbb{N}$, $f : [a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を $[a, \infty)$ 上の単調減少正値関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ は収束する.

(ii) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ は収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.2.7. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ は } \begin{cases} \text{収束する} & (\alpha > 1), \\ \text{発散する} & (\alpha \leq 1). \end{cases}$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.2.8 (次数判定法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とする.

(1) $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n < \infty$ を満たす $\alpha > 1$ が存在すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n \leq \infty$ を満たす $\alpha \leq 1$ が存在すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ は $\begin{cases} \text{収束する} & (\alpha > 0), \\ \text{発散する} & (\alpha \leq 0). \end{cases}$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• Abel の定理

命題 4.2.9 (部分和分法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, $M \leq N$ を満たす任意の $M, N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=M}^N a_n(b_{n+1} - b_n) = a_{N+1}b_{N+1} - a_M b_M - \sum_{n=M}^N (a_{n+1} - a_n)b_{n+1}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.2.3 (Abel の定理). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i)–(iii) を満たすものとする.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ は収束する.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(iii) $\left\{ \sum_{n=0}^N b_n \right\}_{N \in \mathbb{N}}$ は有界である.

このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ は収束し,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^N b_n \right|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.2.4 (Leibniz の定理). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ は収束する.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ は収束し,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

4.3 級数の絶対収束・無条件収束

● 級数の絶対収束・条件収束

定義 4.3.1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとは, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束することを言う.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束するとは, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束し, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が発散することを言う.

命題 4.3.1 (級数の三角不等式). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とするとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束し,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は条件収束し,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.2 (和・スカラー倍の級数). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ は絶対収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

が成り立つ.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)$ は絶対収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 4.3.3 (Cauchy 積の級数). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束すれば,

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$ は絶対収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 級数の無条件収束

命題 4.3.4. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とし, 数列 $\{a_n^\pm\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$a_n^+ = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n), \quad a_n^- = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義する.

- (1) $a_n = a_n^+ - a_n^-$ ($n \in \mathbb{N}$).
- (2) $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ ($n \in \mathbb{N}$).
- (3) $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- = \max\{0, -a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$).
- (4) $a_n^+ \geq 0$, $a_n^- \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.5. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^\pm$ は収束する.

さらに, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.3.6. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とし, $\mathcal{F} = \{F \subseteq \mathbb{N}; F \text{ は有限}\}$ とおくと, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.
- (ii) $\left\{ \sum_{n \in F} a_n; F \in \mathcal{F} \right\}$ は上に有界である.

さらに, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_{n \in F} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.3.2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

(1) \mathbb{N} から \mathbb{N} への全単射 $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を \mathbb{N} の置換と言う.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が無条件収束するとは、 \mathbb{N} の任意の置換 σ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ が収束することを言う.

定理 4.3.1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると、次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は無条件収束する.

さらに、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば、 \mathbb{N} の任意の置換 σ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の項を置換すると,

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{+,-} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{+,-} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{+,-} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}}_{+,-} + \underbrace{\frac{1}{9} - \frac{1}{10}}_{+,-} + \frac{1}{11} - \dots \neq \underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}_{+,+,-} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}}_{+,+,-} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}}_{+,+,-} + \dots$$

となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第5章 関数項級数, 整級数と実解析関数

5.1 関数項級数

● 関数項級数の各点収束・一様収束

定義 5.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列とする.

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x) \quad (N \in \mathbb{N}, x \in I)$$

によって定義される $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ を $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の関数項級数と言ひ, S_N を $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ の第 N 部分和関数と言う.

定義 5.1.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列, $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ を $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の関数項級数とする. $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ が $S \in F(I)$ に I で各点収束するとは, 任意の $x \in I$ に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = S(x)$$

となることを言う. このとき, $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ と書き, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ を $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ の和関数と言う.

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$ は $(0, \infty)$ で各点収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.1.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列, $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ を $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の関数項級数とする. $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ が $S \in F(I)$ に I で一様収束するとは,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N - S\|_{\infty} = 0$$

となることを言う.

命題 5.1.1 (一様収束の強弱). $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列, $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ を $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の関数項級数とするとき, $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ が $S \in F(I)$ に I で一様収束すれば, $\{S_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ は S に I で各点収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$ は $(0, \infty)$ で各点収束するが, 一様収束しない.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 関数項級数の収束判定法

定理 5.1.1 (Cauchy の収束判定法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は I で一様収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $M, N \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $M, N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left\| \sum_{n=0}^N f_n - \sum_{n=0}^M f_n \right\|_{\infty} < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.1.2 (Weierstrass の M 判定法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\|f_n\|_{\infty} \leq M_n$ を満たす $M_n \geq 0$ が存在する.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ は収束する.

このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は I で一様収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ は \mathbb{R} で一様収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 項別微積分定理

定理 5.1.3 (項別積分定理). $a, b \in \mathbb{R}, a < b, \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^1([a, b])$ の関数列とするととき, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が $[a, b]$

で一様収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \in R^1([a, b])$ であり,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.1.4 (項別微分定理). $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ とし,

$$C^1([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ は } [a, b] \text{ で } C^1 \text{ 級である} \}$$

とおく. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $C^1([a, b])$ の関数列とするととき, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が $[a, b]$ で各点収束し, かつ $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ が $[a, b]$ で

一様収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \in C^1([a, b]), \sum_{n=0}^{\infty} f'_n \in C([a, b])$ であり,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)' (x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• Abel の定理

定理 5.1.5 (Abel の定理). $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

$$(i) \left\{ \left\| |f_{N+1}| + \sum_{n=0}^N |f_{n+1} - f_n| \right\|_{\infty} \right\}_{N \in \mathbb{N}} \text{ は上に有界である.}$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} g_n \text{ は } I \text{ で一様収束する.}$$

このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ は I で一様収束し,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n \right\|_{\infty} \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| |f_{N+1}| + \sum_{n=0}^N |f_{n+1} - f_n| \right\|_{\infty} \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{n=0}^N g_n \right\|_{\infty}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

5.2 整級数と実解析関数

● 整級数

定義 5.2.1. $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の形の級数を a を中心とする **整級数** と言う.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ が収束する $x \in \mathbb{R}$ 全体の集合を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の **収束域** と言う.

定理 5.2.1. $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, 次の (i), (ii) を満たす $0 \leq r \leq \infty$ が一意に存在する.

(i) 任意の $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < r$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ は絶対収束する.

(ii) 任意の $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| > r$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ は収束しない.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.2.2. $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする. 定理 5.2.1 の $0 \leq r \leq \infty$ を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の **収束半径** と言う.

命題 5.2.1 (d'Alembert の収束判定法). $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{r}$$

を満たす $0 \leq r \leq \infty$ が $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径である. ただし, $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ とする.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の収束半径は ∞ である.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ の収束半径は 1 である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.2.2 (Cauchy の収束判定法). $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$$

を満たす $0 \leq r \leq \infty$ が $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径である. ただし, $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ とする.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

例.

(1) 任意の $a > 0$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^n x^n$ の収束半径は ∞ である.

(2) 任意の $a > 0$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n$ の収束半径は $\begin{cases} \infty & (0 < a < 1), \\ 1 & (a = 1), \\ 0 & (a > 1) \end{cases}$ である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 5.2.3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ をそれぞれ収束半径 $0 \leq r_1, r_2 \leq \infty$ の $a \in \mathbb{R}$ を中心とする整級数とする. $r = \min\{r_1, r_2\}$ とおくと, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n$ の収束半径は r 以上であり,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \quad (x \in \mathbb{R}, |x-a| < r)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 5.2.4. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ をそれぞれ収束半径 $0 \leq r_1, r_2 \leq \infty$ の $a \in \mathbb{R}$ を中心とする整級数とする. $r = \min\{r_1, r_2\}$ とおくと, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (x-a)^n$ の収束半径は r 以上であり,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (x-a)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \right) \quad (x \in \mathbb{R}, |x-a| < r)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 実解析関数

定義 5.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^∞ 級関数とする.

(1) f が $a \in I$ で**実解析的**であるとは, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ であり,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (x \in I, |x-a| < r)$$

が成り立つことを言う. このとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

を f の a を中心とする **Taylor 級数** と言う.

(2) f が I で**実解析的**であるとは, f が任意の $a \in I$ で実解析的であることを言う.

定理 5.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $a \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^∞ 級関数とすると, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ であり,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (x \in I, |x-a| < r)$$

が成り立てば, f は $(a-r, a+r)$ で実解析的である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 5.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $a \in I$, $N \in \mathbb{N}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^{N+1} 級関数とすると, 任意の $x \in I$ に対し,

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}((1-\theta(x))a + \theta(x)x)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1}$$

を満たす $0 < \theta(x) < 1$ が存在する. さらに, $R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}((1-\theta(x))a + \theta(x)x)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1}$ とおくと, $R_N(x) = o((x-a)^N) (x \rightarrow a)$.

証明. 省略 (微分積分学 I). □

定理 5.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を \mathbb{R} の区間, $a \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^∞ 級関数とすると, ある $r > 0$, $C, M \geq 0$ が存在し,

$$|f^{(n)}(x)| \leq CM^n \quad (n \in \mathbb{N}, x \in I, |x-a| < r)$$

が成り立てば, f は $(a-r, a+r)$ で実解析的である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 項別微積分定理

補題 5.2.2. $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, 次の (i)–(iii) の収束半径は等しい.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

$$(iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.2.4 (項別積分定理). $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とするとき, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ ならば,

$$\int_a^x f(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} \quad (x \in \mathbb{R}, |x-a| < r)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.2.5 (項別微分定理). $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とするとき, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ ならば, f は $(a-r, a+r)$ で微分可能であり,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R}, |x-a| < r)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.2.6. $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とするとき, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ の収束半径が $0 < r \leq \infty$ ならば, f は $(a-r, a+r)$ で C^∞ 級であり,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• Abel の定理

定理 5.2.7 (Abel の定理). $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径は $0 < r \leq \infty$ である.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ は収束する.

このとき, f は $[a, a+r]$ で一様収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a+r-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.2.8 (Abel の定理). $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径は $0 < r \leq \infty$ である.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n r^n$ は収束する.

このとき, f は $[a-r, a]$ で一様収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a-r+0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n r^n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (定理 5.2.7). □

5.3 初等関数の Taylor 級数

● 幾何級数, 指数関数, 対数関数, 冪関数

命題 5.3.1. 幾何級数 $\frac{1}{1-x}$ は $(-1, 1)$ で実解析的であり,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.2. 指数関数 e^x は \mathbb{R} で実解析的であり,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.3. 対数関数 $\log(1+x)$ は $(-1, 1)$ で実解析的であり,

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.3.1. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1) \end{cases}$$

を二項係数と言う.

命題 5.3.4. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \binom{\alpha}{n} + (n+1) \binom{\alpha}{n+1} = \alpha \binom{\alpha}{n}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.5. $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると, 冪関数 $(1+x)^\alpha$ は $(-1, 1)$ で実解析的であり,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 三角関数, 逆三角関数

命題 5.3.6. 余弦関数 \cos は \mathbb{R} で実解析的であり,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.7. 正弦関数 \sin は \mathbb{R} で実解析的であり,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.8. 逆正接関数 \arctan は $(-1, 1)$ で実解析的であり,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R}, |x| < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

関連図書

- [1] 齋藤 正彦, 微分積分学, 東京図書, 2006 年.
- [2] 杉浦 光夫, 解析入門 I(基礎数学), 東京大学出版会, 1980 年.
- [3] 難波 誠, 微分積分学 (数学シリーズ), 裳華房, 1996 年.