

微分積分学Ⅱ 演習問題

柿澤 亮平

島根大学学術研究院 教育学系 数学科教育専攻

目次

第 1 章	積分と可積分条件	1
1.1	積分と Darboux の可積分条件	1
1.2	有界関数列の極限	7
1.3	連続関数列の極限	9
第 2 章	積分の基本性質	13
2.1	可積分関数と積分	13
2.2	連続関数と積分	15
2.3	可積分関数列の極限	18
第 3 章	広義積分の収束・発散	22
3.1	$[a, \infty)$ での広義積分	22
3.2	$(a, b]$ での広義積分	25
3.3	Gamma 関数と Beta 関数	28
3.4	領域の面積	30
3.5	曲線の長さ	33
第 4 章	級数の収束・発散	36
4.1	数列の上極限・下極限	36
4.2	級数とその収束判定法	38
4.3	級数の絶対収束・無条件収束	44
第 5 章	関数項級数, 整級数と実解析関数	45
5.1	関数項級数	45
5.2	整級数と実解析関数	50
5.3	初等関数の Taylor 級数	55

第1章 積分と可積分条件

1.1 積分と Darboux の可積分条件

● 積分

[1] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c \in \mathbb{R}$ とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = c \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$S(f; \Delta, \xi) = c(b - a) \quad (\xi \in \mathcal{X}(\Delta))$$

が成り立つ.

(2) f は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b c dx = c(b - a)$$

が成り立つ.

[2] (指定演習問題 1) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\eta = \left\{ \frac{1}{2}(x_0 + x_1), \dots, \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n) \right\}$$

とおくと,

$$S(f; \Delta, \eta) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

が成り立つ.

(2) f は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

が成り立つ.

3 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a, b])$ に対し,

$$S(f; \Delta, \eta) = e^b - e^a$$

を満たす $\eta \in \mathcal{X}(\Delta)$ が存在する.

(2) f は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$$

が成り立つ.

4 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) f は $\mathbb{R}$ で微分可能である.

(2) f' は 0 を含む任意の有界閉区間 $I \subseteq \mathbb{R}$ で可積分でない.

5 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) (不定積分) f が任意の有界閉区間 $I \subseteq \mathbb{R}$ で可積分であることを証明し, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$$F(x) = \int_a^x f(u) du \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義される $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ.

(2) F が $\mathbb{R}$ で微分可能であることを証明し, $F'(0) = f(0)$ が成り立つか否かを判定せよ.

6 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数, $c \in \mathbb{R}$ とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$, $\xi \in \mathcal{X}(\Delta)$ に対して

$$S(f + g; \Delta, \xi) = S(f; \Delta, \xi) + S(g; \Delta, \xi)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$, $\xi \in \mathcal{X}(\Delta)$ に対して

$$S(cf; \Delta, \xi) = cS(f; \Delta, \xi)$$

が成り立つ.

● 上積分・下積分

[7] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数, $c \in \mathbb{R}$ とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\underline{S}(f; \Delta) + \underline{S}(g; \Delta) \leq \underline{S}(f + g; \Delta) \leq \overline{S}(f + g; \Delta) \leq \overline{S}(f; \Delta) + \overline{S}(g; \Delta)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\overline{S}(cf; \Delta) = \begin{cases} c\overline{S}(f; \Delta) & (c \geq 0), \\ c\underline{S}(f; \Delta) & (c \leq 0), \end{cases} \quad \underline{S}(cf; \Delta) = \begin{cases} c\underline{S}(f; \Delta) & (c \geq 0), \\ c\overline{S}(f; \Delta) & (c \leq 0) \end{cases}$$

が成り立つ.

[8] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\lim_{d(\Delta) \rightarrow +0} (\overline{S}(f; \Delta) - \underline{S}(f; \Delta)) = 0$.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\overline{S}(f; \Delta) - \underline{S}(f; \Delta) < \varepsilon$$

を満たす $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ が存在する.

● Darboux の可積分条件

[9] (指定演習問題 2) (単調関数の可積分性) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とすると
き, f が $[a, b]$ で単調ならば, f は $[a, b]$ で可積分であることを証明せよ.

[10] $[0, 1]$ 上の関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} \quad \left(x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} : 2 \text{ 進展開}, \exists m, n \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq 2^n, x = \frac{m}{2^n} \Rightarrow x_n = m \right)$$

によって定義するとき, f は $[0, 1]$ で可積分であり,

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{18}$$

が成り立つことを証明せよ.

[11] $[0, 1]$ 上の関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \left(\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} : \text{奇数} \right), \\ 0 & \left(\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} : \text{偶数} \right), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

によって定義するとき, f は $[0, 1]$ で可積分であり,

$$\int_0^1 f(x) dx = \log 2$$

が成り立つことを証明せよ.

[12] $(0, \infty)$ 上の関数 $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \left(x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \text{既約分数}, q > 0 \right), \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $[1, 2]$ のある有限点列 $\{a_1, \dots, a_m\}$ が存在し,

$$f(a_j) \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad (j \in \{1, \dots, m\})$$

が成り立つ.

(2) f は $[1, 2]$ で可積分であり,

$$\int_1^2 f(x) dx = 0$$

が成り立つ.

- 13 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, $f : [a, b] \rightarrow \{c, d\}$ を $[a, b]$ 上の関数で, 任意の開区間 $I \subseteq [a, b]$ に対し,

$$f(x) = c, \quad f(y) = d$$

を満たす $x, y \in I$ が存在するものとするとき, f は $[a, b]$ で可積分でないことを証明せよ.

- 14 (微分積分学の基本定理) $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とするとき, 次のことを証明せよ.

- (1) f が I で微分可能であり, かつ f' が I で有界ならば, 任意の $a, b \in I$, $a < b$, $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ に対して

$$\underline{S}(f'; \Delta) \leq f(b) - f(a) \leq \overline{S}(f'; \Delta)$$

が成り立つ.

- (2) (原始関数) f が I で微分可能であり, かつ f' が I で可積分ならば, 任意の $a, b \in I$, $a < b$ に対して

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

が成り立つ.

● 区分求積法

[15] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, 区分求積法を用いて次の等式を証明せよ.

$$(1) \int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

$$(2) \int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

[16] 次の数列 $\{s_n\}_{n \geq 1}$ の極限值を求めよ.

$$(1) s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

$$(2) s_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k \sqrt{n^2 - k^2}.$$

[17] 次の数列 $\{s_n\}_{n \geq 1}$ の極限值を求めよ.

$$(1) s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}.$$

$$(2) s_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}.$$

[18] 次の数列 $\{s_n\}_{n \geq 1}$ の極限值を求めよ.

$$(1) s_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}.$$

$$(2) s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}.$$

1.2 有界関数列の極限

● 関数列の各点収束・一様収束

[1] $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ を

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ が $f \in F(\mathbb{R})$ に $\mathbb{R}$ で各点収束することを証明し, 一様収束するか否かも判定せよ.

[2] $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ が $f \in F(\mathbb{R})$ に $\mathbb{R}$ で各点収束することを証明し, 一様収束するか否かも判定せよ.

[3] $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ を

$$f_n(x) = e^{-nx} \sin x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ が $f \in F\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ に $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ で各点収束することを証明し, 一様収束するか否かも判定せよ.

[4] $\{a_n\}_{n \geq 2}$ を数列とし, $[0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 2}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} na_n x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{n}\right), \\ 2a_n - na_n x & \left(\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}\right), \\ 0 & \left(\frac{2}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \geq 2}$ が $f \in F([0, 1])$ に $[0, 1]$ で各点収束することを証明し, 一様収束するための $\{a_n\}_{n \geq 2}$ の必要十分条件も求めよ.

[5] $(0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx} \quad (0 < x \leq 1)$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ が $f \in F((0, 1])$ に $(0, 1]$ で各点収束することを証明し, 一様収束するか否かも判定せよ.

[6] (指定演習問題 3) $[0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ を

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ が $f \in F([0, 1])$ に $[0, 1]$ で各点収束することを証明し, 一様収束するか否かも判定せよ.

□7 $\alpha > 0$ とし, $[0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ を

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n \quad (0 \leq x \leq 1)$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ が $f \in F([0, 1])$ に $[0, 1]$ で各点収束することを証明し, 一様収束するための α の必要十分条件も求めよ.

□8 $\alpha > 0$ とし, $[0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ を

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ が $f \in F([0, 1])$ に $[0, 1]$ で各点収束することを証明し, 一様収束するための α の必要十分条件も求めよ.

1.3 連続関数列の極限

● 連続関数

[1] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ を

$$f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対して $\delta(\varepsilon) = \log(1 + \varepsilon)$ とおくと, $\delta(\varepsilon) > 0$ であり, $|x| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|e^x - 1| < \varepsilon$$

が成り立つ.

(2) f は $\mathbb{R}$ で連続である.

[2] $(0, \infty)$ 上の関数 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \log x \quad (x > 0)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{e^\varepsilon}$ とおくと, $\delta(\varepsilon) > 0$ であり, $|x - 1| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|\log x| < \varepsilon$$

が成り立つ.

(2) f は $(0, \infty)$ で連続である.

[3] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a \pm 0$ のとき, $f(x)$ が収束し, かつ

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

ならば, $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ は収束しないことを証明せよ.

【補足】 a を f の第一種不連続点と言う.

● 一様連続関数

- [4] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数で, ある $L > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ が存在し,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad (x, y \in I)$$

が成り立つものとするとき, f は I で一様連続であることを証明せよ.

【補足】 f は I で **Hölder 連続** ($0 < \alpha < 1$) または **Lipschitz 連続** ($\alpha = 1$) であると言う.

- [5] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能な関数とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) f は $[a, b]$ で Lipschitz 連続である.

(ii) f' は (a, b) で有界である.

- [6] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

が $\mathbb{R}$ で Lipschitz 連続であるか否かを判定せよ.

- [7] $1 < \alpha < 2$ とするとき, 次の $[0, \infty)$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & (x > 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

が $[0, \infty)$ で Lipschitz 連続であるか否かを判定せよ.

- [8] $n \in \mathbb{N}$ とするとき, 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = x^n \arctan x \quad (x \in \mathbb{R})$$

が $\mathbb{R}$ で Lipschitz 連続であるか否かを判定せよ.

- [9] $0 < \alpha < 1$ とするとき, 次の $[0, \infty)$ 上の関数

$$f(x) = x^\alpha \arctan x \quad (x \geq 0)$$

が $[0, \infty)$ で Lipschitz 連続であるか否かを判定せよ.

- [10] 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $0 < \alpha < 1$ に対して

$$|u^\alpha - v^\alpha| \leq |u - v|^\alpha \quad (u, v \geq 0)$$

が成り立つ.

(2) $0 < \alpha < 1$ とするとき, 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = |x|^\alpha \quad (x \in \mathbb{R})$$

は $\mathbb{R}$ で Hölder 連続である.

● 連続関数空間

11 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ とし, $[a, b]$ 上の多項式列 $\{\varphi_k\}_{k \in \{0, 1, \dots, n\}}$ を

$$\varphi_k(x) = \binom{n}{k} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{n-k} \quad (a \leq x \leq b)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \varphi_k(x) = 1 \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=0}^n k \varphi_k(x) = n \frac{x-a}{b-a} \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つ.

(3) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \varphi_k(x) = n(n-1) \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2 \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つ.

(4) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=0}^n \left(k - n \frac{x-a}{b-a} \right)^2 \varphi_k(x) = n \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つ.

(5) (Weierstrass の近似定理) 任意の $f \in C([a, b])$ に対し, $[a, b]$ 上の多項式列 $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) \varphi_k(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

によって定義すると, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に $[a, b]$ で一様収束する.

【補足】 p_n を f の **Bernstein 多項式** と言う.

12 $[0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{n} \right), \\ 0 & \left(\frac{1}{n} \leq x \leq 1 \right) \end{cases}$$

によって定義するとき, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ が $f \in F([0, 1])$ に $[0, 1]$ で各点収束することを証明し, 一様収束するか否かも判定せよ.

定義. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列とする.

- (1) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**単調増加**であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$ に対して $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ のことを言う.
- (2) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**単調減少**であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$ に対して $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ のことを言う.

13 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $C([a, b])$ の関数列とすると, 次のことを証明せよ.

- (1) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $f \in F([a, b])$ に $[a, b]$ で一様収束しなければ, ある $\varepsilon > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$$

を満たす $a \leq x_n \leq b$ が存在する.

- (2) (Dini の収束定理) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が単調減少であり, かつ $f \in C([a, b])$ に $[a, b]$ で各点収束すれば, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に $[a, b]$ で一様収束する.

定義. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列とする.

- (1) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $a \in I$ で**同等連続**であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(a)| = 0$$

となることを言う.

- (2) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が I で**同等連続**であるとは, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が任意の $a \in I$ で同等連続であることを言う.

14 $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列とすると, 次のことを証明せよ.

- (1) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $a \in I$ で同等連続ならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して f_n は a で連続である.
- (2) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が I で同等連続であり, かつ $f \in F(I)$ に I で各点収束すれば, f は I で連続である.

第2章 積分の基本性質

2.1 可積分関数と積分

- [1] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数, $c \in \mathbb{R}$ とするとき, §1.1.[7]を用いて次のことを証明せよ.

- (1) f, g が $[a, b]$ で可積分ならば, $f + g$ は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

が成り立つ.

- (2) f が $[a, b]$ で可積分ならば, cf は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ.

- [2] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とすると, 次のことを証明せよ.

- (1) f が $[a, b]$ で可積分ならば,

$$\inf_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

が成り立つ.

- (2) (平均値の定理) f が $[a, b]$ で連続ならば,

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

を満たす $a \leq x_0 \leq b$ が存在する.

- [3] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ -1 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

によって定義するとき, $|f|$ は $[a, b]$ で可積分であり,

$$\int_a^b |f(x)|dx = b - a$$

が成り立つが, f は $[a, b]$ で可積分でないことを証明せよ.

4 $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とすると、次のことを証明せよ。

(1) (Hölder の不等式) f, g が $[a, b]$ で可積分ならば、 $|fg|$ は $[a, b]$ で可積分であり、

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| \int_a^b |g(x)|dx$$

が成り立つ。

(2) (Minkowski の不等式) f, g が $[a, b]$ で可積分ならば、 $|f + g|$ は $[a, b]$ で可積分であり、

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx$$

が成り立つ。

5 次のことを証明せよ。

(1) 任意の $p > 1$ に対して

$$|u^p - v^p| \leq p|u - v|(u^{p-1} + v^{p-1}) \quad (u, v \geq 0)$$

が成り立つ。

(2) $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の有界関数とすると、 f が $[a, b]$ で可積分ならば、任意の $p > 1$ に対して $|f|^p$ は $[a, b]$ で可積分である。

6 (Riemann-Lebesgue の定理) $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の可積分関数とすると、次の等式を証明せよ。

$$(1) \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(x) \cos tx dx = 0.$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(x) \sin tx dx = 0.$$

定義. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間、 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする。 f が I で**区分的単調**であるとは、次の (i), (ii) を満たす I の有限点列 $\{x_1, \dots, x_n\}$ が存在することを言う。

(i) f は $I \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ の各区間で単調である。

(ii) 任意の $k \in \{1, \dots, n\}$ に対して x_k は f の第一種不連続点である。

7 (区分的単調関数の可積分性) $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とすると、 f が $[a, b]$ で区分的単調ならば、 f は $[a, b]$ で可積分であることを証明せよ。

定義. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間、 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする。 f が I で**区分的連続**であるとは、次の (i), (ii) を満たす I の有限点列 $\{x_1, \dots, x_n\}$ が存在することを言う。

(i) f は $I \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ の各区間で連続である。

(ii) 任意の $k \in \{1, \dots, n\}$ に対して x_k は f の第一種不連続点である。

8 (区分的連続関数の可積分性) $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とすると、 f が $[a, b]$ で区分的連続ならば、 f は $[a, b]$ で可積分であることを証明せよ。

2.2 連続関数と積分

[1] 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$$

が成り立つ.

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 2\pi & (m = n = 0), \\ \pi & (m = n \neq 0), \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

が成り立つ.

(3) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & (m = n = 0), \\ \pi & (m = n \neq 0), \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

が成り立つ.

[2] (微分積分学の基本定理) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の微分可能関数で, $\forall x \in [a, b]$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ を満たすものとする.

$$c = \min_{a \leq x \leq b} \varphi(x), \quad d = \max_{a \leq x \leq b} \psi(x)$$

とおき, $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[c, d]$ 上の連続関数とすると,

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y) dy \right) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

が成り立つことを証明せよ.

[3] $a > 0$, $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[-a, a]$ 上の連続関数とすると, 次のことを証明せよ.

(1) f が偶関数 ($\Leftrightarrow \forall x \in [-a, a], f(-x) = f(x)$) ならば,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

が成り立つ.

(2) f が奇関数 ($\Leftrightarrow \forall x \in [-a, a], f(-x) = -f(x)$) ならば,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

が成り立つ.

4 次の問いに答えよ.

(1) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[0, 1]$ 上の連続関数とするとき,

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) 次の積分

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

の値を求めよ.

5 (指定演習問題 4) $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$, $a \leq c \leq b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の連続関数とし, $[a, b]$ 上の関数 $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\varphi(x) = \int_0^1 f((1-t)c + tx) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) φ は $[a, b]$ で連続である.

(2) (平均値) 次の等式

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(c) & (x = c), \\ \frac{1}{x-c} \int_c^x f(y) dy & (x \neq c) \end{cases}$$

が成り立つ.

6 次の等式

$$f(x) = \sinh x + \int_{-1}^1 x f(x) dx \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

を満たす $[-1, 1]$ 上の連続関数 $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ.

7 (Legendre 多項式) $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$P_n(x) = \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & (m = n), \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

が成り立つ.

8 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 \leq \frac{1}{1-x^n} - 1 \leq \frac{x^n}{1-x} \quad (0 \leq x < 1)$$

が成り立つ.

(2) 数列 $\{I_n\}_{n \geq 1}$ を

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1), \quad f_n(x) = \frac{1}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

によって定義すると, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2}$ となる.

9 次のことを証明せよ.

(1) 次の不等式

$$0 \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{1+y}} \leq \frac{y}{2} \quad (y \geq 0)$$

が成り立つ.

(2) $[0, \infty)$ 上の関数 $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^x}} dt \quad (x \geq 0)$$

によって定義すると, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ となる.

10 (Daniell 積分) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $C([a, b])$ 上の汎関数 $I: C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \quad (f \in C([a, b]))$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $f \in C([a, b])$ に対して

$$|I(f)| \leq (b-a) \|f\|_\infty$$

が成り立つ.

(2) 単調減少であり, かつ 0 に $[a, b]$ で各点収束する $C([a, b])$ の任意の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = 0$$

となる.

2.3 可積分関数列の極限

● 可積分関数空間

[1] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, $R^1([a, b])$ 上の作用素 $A: R^1([a, b]) \rightarrow F([a, b])$ を

$$Af(x) = \int_a^x f(u)du \quad (f \in R^1([a, b]), a \leq x \leq b)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $f \in R^1([a, b])$ に対して

$$|Af(x) - Af(y)| \leq \|f\|_\infty |x - y| \quad (a \leq x, y \leq b)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $f \in R^1([a, b])$ に対して

$$\|Af\|_\infty \leq (b - a)\|f\|_\infty$$

が成り立つ.

定義. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p \geq 1$ とする. 任意の $f \in R^1([a, b])$ に対し,

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

を f の $[a, b]$ での **L^p セミノルム** と言う.

[2] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p \geq 1$ とするとき, $(R^1([a, b]), \|\cdot\|_p)$ は

(i) $\forall f \in R^1([a, b]), (\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0)$.

を満たさない. (i) の反例を一つ挙げよ.

[3] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p \geq 1$ とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $f \in R^1([a, b])$ に対して

$$\|f\|_p \leq (b - a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$$

が成り立つ.

(2) 任意の $f \in C([a, b])$ に対し,

$$\delta^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty \leq \|f\|_p$$

を満たす $\delta > 0$ が存在する.

定義. $p > 1$ とする.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

を満たす $q > 1$ を p の **共役指数** と言い, $q = p^*$ と書く.

4 $a, b \in \mathbb{R}, a < b, p > 1$ とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) (Young の不等式) 任意の $u, v \geq 0$ に対して

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^{p^*}}{p^*}$$

が成り立つ.

(2) (Hölder の不等式) 任意の $f, g \in R^1([a, b])$ に対して

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p^*}$$

が成り立つ.

5 $a, b \in \mathbb{R}, a < b, p > 1$ とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $u, v \in \mathbb{R}$ に対して

$$|u + v|^p \leq |u||u + v|^{p-1} + |v||u + v|^{p-1}$$

が成り立つ.

(2) (Minkowski の不等式) 任意の $f, g \in R^1([a, b])$ に対して

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

が成り立つ.

6 $a, b \in \mathbb{R}, a < b, p \geq 1$ とするとき, $(C([a, b]), \|\cdot\|_p)$ はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ.

- (i) $\forall f \in C([a, b]), (\|f\|_p \geq 0) \wedge (\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0)$.
- (ii) (三角不等式) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ ($f, g \in C([a, b])$).
- (iii) $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$ ($c \in \mathbb{R}, f \in C([a, b])$).

7 $a, b \in \mathbb{R}, a < b, p \geq 1$ とするとき, $(C([a, b]), \|\cdot\|_p)$ は

(c) $C([a, b])$ の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $C([a, b])$ の Cauchy 列ならば, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $C([a, b])$ に収束する.

を満たさない. (c) の反例を一つ挙げよ.

【ヒント】 $[a, b]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \left(a \leq x \leq \frac{a+b}{2}\right), \\ \frac{2^n}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) & \left(\frac{a+b}{2} \leq x \leq \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^n}\right), \\ 1 & \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^n} \leq x \leq b\right) \end{cases}$$

によって定義すると, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ は $C([a, b])$ の関数列である.

● 項別微積分定理

8 $a > 0$ とし, $[0, a]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ を

$$f_n(x) = n \sin \frac{x}{n} \quad (0 \leq x \leq a)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $[0, a]$ 上の関数列 $\{g_n\}_{n \geq 1}$ を

$$g_n(x) = x - f_n(x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

によって定義するとき, g_n が $[0, a]$ で単調増加であることを証明せよ.

(2) 次の極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f_n(x) dx$$

の値を求めよ.

9 $[0, 1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ を

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n \quad (0 \leq x \leq 1)$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\{f_n\}_{n \geq 1}$ が $f \in F([0, 1])$ に $[0, 1]$ で各点収束することを証明せよ.

(2) 次の等式

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

が成り立つか否かを判定せよ.

定義. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p \geq 1$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F([a, b])$ の関数列とする. $n \rightarrow \infty$ のとき, f_n が $f \in F([a, b])$ に $[a, b]$ で L^p 収束するとは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

となることを言う.

10 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^1([a, b])$ の関数列とするとき, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $f \in R^1([a, b])$ に $[a, b]$ で L^1 収束すれば,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

が成り立つことを証明せよ.

定理 (Arzelà の優収束定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^1([a, b])$ の関数列とするとき, $\{\|f_n\|_\infty\}_{n \in \mathbb{N}}$ が上に有界であり, かつ $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $f \in R^1([a, b])$ に $[a, b]$ で各点収束すれば, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に $[a, b]$ で L^1 収束する.

証明. 省略.

□

定理 (単調収束定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^1([a, b])$ の関数列とすると, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が単調増加であり, かつ $f \in R^1([a, b])$ に $[a, b]$ で各点収束すれば,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

が成り立つ.

証明. 省略. □

- [11] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^1([a, b])$ の関数列, $f \in R^1([a, b])$ とするとき, 次の (i) $\Rightarrow$ (ii) を証明し, (i) $\Leftarrow$ (ii) の反例を一つ挙げよ.

(i) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に $[a, b]$ で一様収束する.

(ii) $\{\|f_n\|_\infty\}_{n \in \mathbb{N}}$ は上に有界であり, かつ $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に $[a, b]$ で各点収束する.

- [12] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^1([a, b])$ の関数列とすると, 次の命題が真ならば証明し, 偽ならば反例を一つ挙げよ.

(1) $\{\|f_n\|_\infty\}_{n \in \mathbb{N}}$ が上に有界であり, かつ $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $f \in R^\infty([a, b])$ に $[a, b]$ で各点収束すれば, $f \in R^1([a, b])$ である.

(2) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が単調増加であり, かつ $f \in R^\infty([a, b])$ に $[a, b]$ で各点収束すれば, $f \in R^1([a, b])$ である.

- [13] (Picard の逐次近似法) $a, b, t_0 \in \mathbb{R}$, $a < b$, $a \leq t_0 \leq b$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上の一様連続関数とし, $[a, b]$ 上の関数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$x_0(t) = x_0, \quad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_n(s))ds \quad (a \leq t \leq b)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $[a, b]$ 上の C^1 級関数列である.

(2) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $x \in F([a, b])$ に $[a, b]$ で一様収束すれば, $x \in C^1([a, b])$ であり,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s))ds \quad (a \leq t \leq b)$$

が成り立つ.

第3章 広義積分の収束・発散

3.1 $[a, \infty)$ での広義積分

● 関数の上極限・下極限

定義 (Landau の記号). $a \in \mathbb{R}$ とする.

(1) (a, ∞) を ∞ の除外近傍という.

(2) $f, g : (a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を (a, ∞) 上の正値関数とする. $f(x) = O(g(x))$ ($x \rightarrow \infty$) であるとは,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

であることを言う. このとき, $f(x) \leq g(x)$ ($x \rightarrow \infty$) と書く.

[1] $a \in \mathbb{R}$, $f, g, h : (a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を (a, ∞) 上の正値関数とすると, 次のことを証明せよ.

(1) $f(x) \leq h(x)$, $g(x) \leq h(x)$ ($x \rightarrow \infty$) ならば, $f(x) + g(x) \leq h(x)$ ($x \rightarrow \infty$).

(2) f が (a, ∞) で上に有界, かつ $g(x) \leq h(x)$ ($x \rightarrow \infty$) ならば, $f(x)g(x) \leq h(x)$ ($x \rightarrow \infty$).

[2] $a \in \mathbb{R}$, $f, g, h : (a, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を (a, ∞) 上の正値関数とすると, 次のことを証明せよ.

(1) (反射律) $f(x) \leq f(x)$ ($x \rightarrow \infty$).

(2) (推移律) $f(x) \leq g(x)$, $g(x) \leq h(x)$ ($x \rightarrow \infty$) ならば, $f(x) \leq h(x)$ ($x \rightarrow \infty$).

● 広義積分の収束判定法

□3 次の広義積分が収束することを証明し、その値を求めよ.

(1) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$

(2) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh ax} dx \ (a > 0).$

□4 次の広義積分が収束することを証明し、その値を求めよ.

(1) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx.$

(2) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$

□5 次のことを証明せよ.

(1) 次の不等式

$$1 - u^2 \leq e^{-u^2} \leq \frac{1}{1+u^2} \quad (u \geq 0)$$

が成り立つ.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して

$$\int_0^1 (1-u^2)^n du < \int_0^{\infty} e^{-nu^2} du < \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n} du$$

が成り立つ.

(3) 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx < \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} x dx$$

が成り立つ.

(4) (Gauss 積分) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

● 広義積分の絶対収束・条件収束

□6 $a > 0, b \in \mathbb{R}$ とするとき, 次の広義積分

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx, \quad J(a, b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bxdx$$

が絶対収束することを証明し, それらの値を求めよ.

3.2 $(a, b]$ での広義積分

• 関数の上極限・下極限

定義 (Landau の記号). $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ とする.

(1) $I_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} ; 0 < |x - a| < \delta\}$ を a の除外近傍という.

(2) $f, g : I_\delta(a) \rightarrow (0, \infty)$ を $I_\delta(a)$ 上の正値関数とする. $f(x) = O(g(x))$ ($x \rightarrow a$) であるとは,

$$\limsup_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

であることを言う. このとき, $f(x) \leq g(x)$ ($x \rightarrow a$) と書く.

[1] $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f, g, h : I_\delta(a) \rightarrow (0, \infty)$ を $I_\delta(a)$ 上の正値関数とすると, 次のことを証明せよ.

(1) $f(x) \leq h(x)$, $g(x) \leq h(x)$ ($x \rightarrow a$) ならば, $f(x) + g(x) \leq h(x)$ ($x \rightarrow a$).

(2) f が $I_\delta(a)$ で上に有界, かつ $g(x) \leq h(x)$ ($x \rightarrow a$) ならば, $f(x)g(x) \leq h(x)$ ($x \rightarrow a$).

[2] $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f, g, h : I_\delta(a) \rightarrow (0, \infty)$ を $I_\delta(a)$ 上の正値関数とすると, 次のことを証明せよ.

(1) (反射律) $f(x) \leq f(x)$ ($x \rightarrow a$).

(2) (推移律) $f(x) \leq g(x)$, $g(x) \leq h(x)$ ($x \rightarrow a$) ならば, $f(x) \leq h(x)$ ($x \rightarrow a$).

● 広義積分の収束判定法

□3 次の広義積分が収束することを証明し, その値を求めよ.

(1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

(2) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx.$

□4 次の広義積分が収束することを証明し, その値を求めよ.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} dx.$

(2) $\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

● 広義積分の絶対収束・条件収束

5 $\alpha > -1, n \in \mathbb{N}$ とするとき, 次の広義積分

$$I(\alpha, n) = \int_0^1 x^\alpha (\log x)^n dx$$

が絶対収束することを証明し, その値を求めよ.

6 次のことを証明せよ.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx$ は絶対収束し,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx$$

が成り立つ.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$

3.3 Gamma 関数と Beta 関数

• Gamma 関数

[1] (指定演習問題 5) 次の広義積分が収束するか否かを判定せよ.

(1) $\int_1^\infty \frac{1}{(x^3 - 1)^\alpha} dx \ (\alpha > 0).$

(2) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx \ (\alpha > 0).$

[2] $\alpha > 0$ とするとき, 次の広義積分

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

が収束するか否かを判定せよ.

[3] 次のことを証明せよ.

(1) 次の $[-\pi, \pi]$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} - \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{-1} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は $[-\pi, \pi]$ で連続である.

(2) (Dirichlet 積分) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

【ヒント】 Riemann-Lebesgue の定理を用いる.

● Beta 関数

□4 次の広義積分が収束することを証明し, その値を求めよ.

$$(1) \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx \quad (a, b \in \mathbb{R}, a < b).$$

$$(2) \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

□5 次の広義積分が収束することを証明し, その値を求めよ.

$$(1) \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

$$(2) \int_{-1}^1 \frac{1}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} dx \quad (a > 1).$$

□6 次の広義積分が収束することを証明し, その値を Beta 関数 $B(x, y)$ ($x, y > 0$) で表せ.

$$(1) \int_a^b (t-a)^{x-1} (b-t)^{y-1} dt \quad (a, b \in \mathbb{R}, a < b).$$

$$(2) \int_0^\infty \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}} dt.$$

3.4 領域の面積

● 縦線閉領域の面積

- [1] (指定演習問題 6) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の狭義単調増加かつ連続な関数とするとき, 次の問いに答えよ. ただし, $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ は f の逆である.

- (1) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b, f(a) \leq y \leq f(x)\}$ とおくととき, D_1 の面積を求めよ.
(2) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(a) \leq y \leq f(b), a \leq x \leq f^{-1}(y)\}$ とおくととき, D_2 の面積を求めよ.
(3) (1), (2) または置換積分法を用いて

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = bf(b) - af(a)$$

が成り立つことを証明せよ.

- [2] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の狭義単調減少かつ連続な関数とするとき, 次の問いに答えよ. ただし, $f^{-1} : [f(b), f(a)] \rightarrow \mathbb{R}$ は f の逆である.

- (1) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b, f(b) \leq y \leq f(x)\}$ とおくととき, D_1 の面積を求めよ.
(2) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(b) \leq y \leq f(a), a \leq x \leq f^{-1}(y)\}$ とおくととき, D_2 の面積を求めよ.
(3) (1), (2) または置換積分法を用いて

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(b)}^{f(a)} f^{-1}(x)dx = bf(b) - af(a)$$

が成り立つことを証明せよ.

- [3] (スーパー楕円) $a, b > 0$ とし, $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 1 \right\}$ とおくととき, 次の問いに答えよ.

- (1) D の概形を図示せよ.
(2) D の面積を求めよ.

- [4] (スーパー楕円) $a, b > 0$ とし, $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{4}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{4}} \leq 1 \right\}$ とおくととき, 次の問いに答えよ.

- (1) D の概形を図示せよ.
(2) D の面積を求めよ.

- [5] (サイクロイド) $a > 0$ とし, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq t \leq 2\pi, x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)\}$ とおく. x 軸と C で囲まれた閉領域を D とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) D の概形を図示せよ.
(2) D の面積を求めよ.

[6] (リサージュ曲線) $a > 0, n \in \mathbb{N}$ とし, $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq t \leq 2\pi, x = a \sin t, y = a \sin 2nt\}$ とおく. C_n で囲まれた閉領域を D_n とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) D_n の概形を図示せよ.

(2) D_n の面積を求めよ.

[7] $n \in \mathbb{N}$ とし, $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, 0 \leq y \leq x^n e^{-x}\}$ とおくととき, 次の問いに答えよ.

(1) D_n の概形を図示せよ.

(2) D_n の面積を求めよ.

[8] (シノイド) $a > 0$ とし, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x < 2a, y^2(2a - x) \leq x^3\}$ とおくととき, 次の問いに答えよ.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) D の面積を求めよ.

● 極閉領域の面積

- [9] $a, b > 0, a \geq b$ とし, $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1 \right\}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) D の概形を図示せよ.
- (2) D の面積を求めよ.

- [10] (Descartes の葉線) $a > 0$ とし, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, x^3 - 3axy + y^3 = 0\}$ とおく. C で囲まれた閉領域を D とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) D の概形を図示せよ.
- (2) D の面積を求めよ.

- [11] (カージオイド) $a > 0$ とし, $C = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] ; 0 \leq \theta \leq 2\pi, r = a(1 + \cos \theta)\}$ とおく. C で囲まれた閉領域を D とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) D の概形を図示せよ.
- (2) D の面積を求めよ.

- [12] (薔薇曲線) $a > 0, n \in \mathbb{N}$ とし, $C_n = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] ; 0 \leq \theta \leq 2\pi, r = a \sin n\theta\}$ とおく. C_n で囲まれた閉領域を D_n とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) D_n の概形を図示せよ.
- (2) D_n の面積を求めよ.

3.5 曲線の長さ

• C^1 級パラメータ曲線の長さ

- [1] (スーパー楕円) $a, b > 0$ とし, $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \right\}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) C のパラメータ表示を一つ挙げ, C の概形を図示せよ.
(2) C の長さを求めよ.

- [2] (内サイクロイド) $0 < a < b$ とし, $C_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = b^2\}$ とおく. C を半径 a の円 C_a が C_b 上を内接しながら 1 回転するとき, C_a 上の定点が描く曲線とすると, 次の問いに答えよ.

- (1) C のパラメータ表示の一つは

$$\begin{cases} x(t) = (b-a) \cos\left(\frac{a}{b}t\right) + a \cos\left(\frac{b-a}{b}t\right), \\ y(t) = (b-a) \sin\left(\frac{a}{b}t\right) - a \sin\left(\frac{b-a}{b}t\right) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

であることを証明し, C の概形を図示せよ.

- (2) C の長さを求めよ.

- [3] (外サイクロイド) $0 < a < b$ とし, $C_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = b^2\}$ とおく. C を半径 a の円 C_a が C_b 上を外接しながら 1 回転するとき, C_a 上の定点が描く曲線とすると, 次の問いに答えよ.

- (1) C のパラメータ表示の一つは

$$\begin{cases} x(t) = (b+a) \cos\left(\frac{a}{b}t\right) - a \cos\left(\frac{b+a}{b}t\right), \\ y(t) = (b+a) \sin\left(\frac{a}{b}t\right) - a \sin\left(\frac{b+a}{b}t\right) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

であることを証明し, C の概形を図示せよ.

- (2) C の長さを求めよ.

● 直交座標上の C^1 級曲線の長さ

[4] (懸垂線) $a, b > 0$ とし, $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq b, y = a \cosh \frac{x}{a} \right\}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) C の概形を図示せよ.

(2) C の長さを求めよ.

[5] $0 < a < b$ とし, $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b, y = \log x \}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) C の概形を図示せよ.

(2) C の長さを求めよ.

[6] (放物線) $a, p > 0$ とし, $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x \leq a, y^2 = 4px \}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) C の概形を図示せよ.

(2) C の長さを求めよ.

● 極座標上の C^1 級曲線の長さ

- [7] (Archimedes の螺旋) $c > 0$, $0 < \alpha \leq 2\pi$ とし, $C = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] ; 0 \leq \theta \leq \alpha, r = c\theta\}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) C の概形を図示せよ.
- (2) C の長さを求めよ.

- [8] 次のことを証明せよ.

- (1) (レムニスケート周率, 第一種完全楕円積分) $-1 < k < 1$ とするとき, 次の広義積分

$$\omega = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx, \quad K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} dy$$

は収束する.

- (2) 次の等式

$$\omega = \sqrt{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

が成り立つ.

【ヒント】 $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) と置換する.

- [9] (レムニスケート) $a > 0$ とし, $C = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] ; 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 = 2a^2 \cos 2\theta\}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) C の概形を図示せよ.
- (2) C の長さをレムニスケート周率 ω で表せ.

- [10] 次の広義積分が収束することを証明し, その値をレムニスケート周率 ω で表せ.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx.$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos x}} dx.$

第4章 級数の収束・発散

4.1 数列の上極限・下極限

[1] 次の数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の上極限, 下極限をそれぞれ求めよ.

(1) $a_n = 1 + n^{(-1)^n}$.

(2) $a_n = \sin \frac{n\pi}{3}$.

[2] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, 次のことを証明せよ.

(1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界ならば, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sup_{m \geq N} a_m - \inf_{m \geq N} a_m = \sup_{m, n \geq N} |a_n - a_m|$$

が成り立つ.

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Cauchy 列ならば, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$.

[3] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことであることを証明せよ.

(i) α は $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の上界である.

(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n(k)} = \alpha$ となる $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在する.

[4] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことであることを証明せよ.

(i) α は $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の下界である.

(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n(k)} = \alpha$ となる $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在する.

[5] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, 次のことを証明せよ.

(1) 次の不等式

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ.

(2) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ.

□6 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を非負数列 ($\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \geq 0$) とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) 次の不等式

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ.

(2) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ.

□7 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を正数列 ($\Leftrightarrow \forall n \geq 1, a_n > 0$) とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) (Cesàro の不等式) 次の不等式

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

が成り立つ.

(2) $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

が成り立つ.

□8 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n > 0$.

このとき, 次のことを証明せよ.

(1) (Stolz-Cesàro の不等式) 次の不等式

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

が成り立つ.

(2) $\left\{ \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

が成り立つ.

4.2 級数とその収束判定法

● 級数

□1 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とすると、次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

□2 (Stolz-Cesàro の定理) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列で、次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n > 0$, かつ $\left\{ \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する.

このとき, $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

が成り立つことを証明せよ.

□3 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列で、次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n > 0$, かつ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

このとき,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{b_N} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

が成り立つことを証明せよ.

□4 (Kronecker の補題) $\{a_n\}_{n \geq 1}, \{b_n\}_{n \geq 1}$ を数列で、次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

(ii) $\forall n \geq 1, b_{n+1} - b_n > 0$, かつ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

このとき,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{b_N} \sum_{n=1}^N a_n b_n = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

【ヒント】 部分和分法を用いる.

● 級数の収束判定法 I

5 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とすると、次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ は収束する.

6 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列, $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の正項級数とすると、次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ は収束する.

7 次の級数が収束するか否かを判定せよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \quad (a > 0).$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n^2}}{n!} \quad (a > 0).$

8 次の級数が収束するか否かを判定せよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^m}{(mn)!} \quad (m \in \mathbb{N}, m \geq 1).$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(mn)!}{n^{mn}} \quad (m \in \mathbb{N}, m \geq 1).$

9 次の級数が収束するか否かを判定せよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1) \cdots (na+1)}{(b+1)(2b+1) \cdots (nb+1)} \quad (a, b > 0).$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{na+1}{nb+1} \right)^n \quad (a, b > 0).$

10 次の級数が収束するか否かを判定せよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+a} \right)^{n^2} \quad (a > -1).$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^\alpha} \quad (\alpha > 0).$

● 級数の収束判定法 II

- 11 $0 < a < b$, $b - a \in \mathbb{Z}$ とし, 数列 $\{s_n\}_{n \geq 1}$ を

$$s_n = \sum_{k=1}^{(b-a)n} \frac{1}{an+k} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

によって定義するとき, $\{s_n\}_{n \geq 1}$ が収束することを証明し, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ の値を求めよ.

- 12 (Euler-Mascheroni 定数) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は狭義単調減少である.
- (2) 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ に対して

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) < a_n < \frac{1}{2} \left(2 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \right)$$

が成り立つ.

- (3) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は収束し, $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とおくと, $\frac{1}{2} \leq \gamma < \frac{7}{8}$.

【補足】 $\gamma = 0.5772 \dots$.

- 13 (指定演習問題 7) $\alpha > 0$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $(1, \infty)$ 上の関数 $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\alpha} \quad (x > 1)$$

によって定義するとき, f の原始関数 F を求めよ.

- (2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ が収束するか否かを判定せよ.

- 14 $\alpha > 0$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $(1, \infty)$ 上の関数 $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \frac{\log x}{x^\alpha} \quad (x > 1)$$

によって定義するとき, f の原始関数 F を求めよ.

- (2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha}$ が収束するか否かを判定せよ.

15 $\alpha > 0$ とするとき, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right)$ が収束するか否かを判定せよ.

16 $\alpha > 0$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $(1, \infty)$ 上の関数 $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \log x} \quad (x > 1)$$

によって定義するとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x)$ ($0 < \alpha \leq 1$), $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x)$ ($\alpha > 1$) の値をそれぞれ求めよ.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log n}$ が収束するか否かを判定せよ.

17 $\alpha > 0$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $(0, \infty)$ 上の関数 $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$f(x) = x^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right), \quad g(x) = x^{\alpha - \frac{3}{2}} \quad (x > 0)$$

によって定義するとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ の値を求めよ.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ が収束するか否かを判定せよ.

18 (Kummer の収束判定法) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とすると, 次のことを証明せよ.

(1) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - x_{n+1} \right) > 0$ ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - x_{n+1} \right) < 0$, かつ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ が発散すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

19 (Raabe の収束判定法) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とすると, 次のことを証明せよ.

(1) $\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$ ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$ ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

20 (Bertrand の収束判定法) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とすると, 次のことを証明せよ.

(1) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \log n \left\{ n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right\} > 1$ ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \log n \left\{ n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right\} < 1$ ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

21 (Gauss の収束判定法) $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とし, 数列 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$b_n = n^\alpha \left\{ n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - a \right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $a > 1$, かつ $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $a \leq 1$, かつ $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界ならば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

【ヒント】 Raabe の収束判定法, Bertrand の収束判定法を用いる.

22 次の級数が収束するか否かを判定せよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}.$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1) \cdots (a+n)}{(b+1) \cdots (b+n)} \quad (a, b \geq 0).$

• Abel の定理

23 (Abel の定理) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ は収束する.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束する.

このとき, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ は収束し,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \left(\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^N b_n \right|$$

が成り立つことを証明せよ.

24 $0 < \theta < 2\pi$ とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

が成り立つ.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

が成り立つ.

25 $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列で, 次の (i), (ii) を満たすもの, $0 < \theta < 2\pi$ とする.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} |r_{n+1} - r_n|$ は収束する.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} r_n \cos n\theta, \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin n\theta$ は収束することを証明せよ.

26 次の級数が収束するか否かを判定せよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\log n}{n}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \sin \frac{\theta}{n} \quad (\theta \in \mathbb{R}, \theta \neq 0)$.

4.3 級数の絶対収束・無条件収束

● 級数の絶対収束・条件収束

- [1] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ は条件収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

が成り立つことを証明せよ.

- [2] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると、次の命題が真ならば証明し、偽ならば反例を一つ挙げよ.

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ は収束する.
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ は収束する.

- [3] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると、次の命題が真ならば証明し、偽ならば反例を一つ挙げよ.

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$ は絶対収束する.
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$ は収束する.

- [4] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上の関数で、ある $r > 0$, $M > 0$ が存在し,

$$|f(x)| \leq M|x| \quad (-r < x < r)$$

が成り立つものとするとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} f(a_n)$ は絶対収束することを証明せよ.

- [5] (指定演習問題 8) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると、次のことを証明せよ.

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束し, かつ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ は絶対収束する.
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束し, かつ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ は条件収束する.

- [6] (Mertens の定理) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束し, かつ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対

収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$ は収束し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

が成り立つことを証明せよ.

第5章 関数項級数, 整級数と実解析関数

5.1 関数項級数

● 関数項級数の各点収束・一様収束

[1] $(0, \infty)$ 上の関数項級数 $\{S_N\}_{N \geq 1}$ を

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{(n-1)!}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \quad (x > 0)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ に対して

$$\frac{1}{x} - S_N(x) = \frac{N!}{x(x+1) \cdots (x+N)} \quad (x > 0)$$

が成り立つ.

(2) $\{S_N\}_{N \geq 1}$ は

$$S(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

に $(0, \infty)$ で各点収束する.

[2] $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ 上の関数項級数 $\{S_N\}_{N \geq 1}$ を

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{1-x^{2n}} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ に対して

$$S_N(x) = \frac{x}{1-x} \frac{1-x^{2N-1}}{1-x^{2N}} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 1)$$

が成り立つ.

(2) $\{S_N\}_{N \geq 1}$ は

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & (|x| < 1), \\ \frac{1}{1-x} & (|x| > 1) \end{cases}$$

に $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ で各点収束する.

□3 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を正数列とすると,

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n!} < \infty$$

ならば, 次の $(0, \infty)$ 上の関数項級数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \quad (x > 0)$$

は $(0, \infty)$ で各点収束することを証明せよ.

【ヒント】 Raabe の収束判定法を用いる.

定義. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列とする. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が I で絶対収束するとは, $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ が収束することを言う.

□4 (関数項級数の三角不等式) $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列とすると, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ が I で絶対収束すれば, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は I で一様収束し,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$$

が成り立つことを証明せよ.

□5 (Weierstrass の M 判定法) $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\|f_n\|_\infty \leq M_n$ を満たす $M_n \geq 0$ が存在する.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ は収束する.

このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ は I で絶対収束することを証明せよ.

● 関数項級数の収束判定法

[6] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数項級数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が $\mathbb{R}$ で各点収束することを証明し、一様収束するか否かも判定せよ.

[7] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数項級数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が $\mathbb{R}$ で各点収束することを証明し、一様収束するか否かも判定せよ.

[8] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数項級数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

が $\mathbb{R}$ で各点収束することを証明し、一様収束するか否かも判定せよ.

[9] $\alpha > 0$ とするとき, 次の $[0, \infty)$ 上の関数項級数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{\alpha} e^{-nx^2} \quad (x \geq 0)$$

が $[0, \infty)$ で各点収束することを証明し、一様収束するか否かも判定せよ.

[10] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数項級数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{x}{n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が $\mathbb{R}$ で各点収束することを証明し、一様収束するか否かも判定せよ.

● 項別微積分定理

11 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし, $\mathbb{R}$ 上の関数項級数 S を

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} + n^{\beta} x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $\alpha > 1$ ならば, S は $\mathbb{R}$ で一様収束する.
- (2) $\alpha > \max\left\{1, \frac{\beta+2}{3}\right\}$ ならば, S は $\mathbb{R}$ で項別微分可能である.

12 $\mathbb{R}$ 上の関数項級数 S を

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

- (1) S は $\mathbb{R}$ で一様収束する.
- (2) S は $\mathbb{Z}\pi$ で項別微分可能でない.

13 (Fourier 級数) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \geq 1}$ を数列とし, $\mathbb{R}$ 上の関数項級数 S を

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が絶対収束すれば, S は $\mathbb{R}$ で連続である.
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^m a_n, \sum_{n=1}^{\infty} n^m b_n$ が絶対収束する $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ が存在すれば, S は $\mathbb{R}$ で C^m 級であり, 任意の $k \in \{1, \dots, m\}$ に対して

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k \left\{ a_n \cos \left(nx + \frac{k}{2} \pi \right) + b_n \sin \left(nx + \frac{k}{2} \pi \right) \right\} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

• Abel の定理

- [14] (Abel の定理) $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列, $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $F(I)$ の関数列で, 次の (i)–(iii) を満たすものとする.

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|$ は I で一様収束する.
(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty = 0$.
(iii) $\left\{ \left\| \sum_{n=0}^N g_n \right\|_\infty \right\}_{N \in \mathbb{N}}$ は上に有界である.

このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ は I で一様収束し,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n \right\|_\infty \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| |f_{N+1}| + \sum_{n=0}^N |f_{n+1} - f_n| \right\|_\infty \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{n=0}^N g_n \right\|_\infty$$

が成り立つことを証明せよ.

- [15] 次の $[0, 2\pi]$ 上の関数項級数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

が $[0, 2\pi]$ で各点収束することを証明し, 一様収束するか否かも判定せよ.

- [16] (Leibniz の定理) $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $R^\infty(I)$ の関数列で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|$ は I で一様収束する.
(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty = 0$.

このとき, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$ は I で一様収束し,

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n \right\|_\infty \leq \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| |f_{N+1}| + \sum_{n=0}^N |f_{n+1} - f_n| \right\|_\infty$$

が成り立つことを証明せよ.

- [17] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数項級数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が $\mathbb{R}$ で各点収束することを証明し, 一様収束するか否かも判定せよ.

5.2 整級数と実解析関数

● 整級数

[1] 次の整級数 f の収束域を求めよ.

$$(1) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n.$$

$$(2) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\theta}{n} \right) x^n \quad (0 < \theta < \pi).$$

[2] (指定演習問題 9) $\alpha > 0$ とするとき, 次の整級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

の収束域を求めよ.

[3] $\alpha > 0$ とするとき, 次の整級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^n$$

の収束域を求めよ.

[4] $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列とするととき, 次の整級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

の収束半径が $0 < r < \infty$ であり, かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1}{r}$$

が成り立てば, f の収束域は $(a - r, a + r)$ であることを証明せよ.

[5] 次の整級数 f の収束域を求めよ.

$$(1) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

$$(2) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n.$$

[6] 次の整級数 f の収束域を求めよ.

$$(1) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}.$$

$$(2) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{n^2}.$$

● 実解析関数

7 $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, 次の整級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

の収束半径が $0 < r \leq \infty$ ならば, 任意の有界閉区間 $I \subseteq (a - r, a + r)$ に対し, f は I で一様収束することを証明せよ.

8 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

が成り立つ. ただし, p_n は次の漸化式

$$p_0(x) = 1, \quad p_{n+1}(x) = x^2 p_n'(x) - 2nx p_n(x) + p_n(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義される n 次以下の多項式である.

(2) f は $\mathbb{R}$ で C^∞ 級であるが, 0 で実解析的でない.

● 項別微積分定理

[9] 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} x^n = \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つことを証明せよ.

[10] 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^m x^n = \frac{p_m(x)}{(1-x)^{m+1}} \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つことを証明せよ. ただし, p_m は次の漸化式

$$p_0(x) = 1, \quad p_{m+1}(x) = x(1-x)p'_m(x) + (m+1)xp_m(x) \quad (m \in \mathbb{N})$$

によって定義される m 次以下の多項式である.

[11] $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ とするとき, 次の級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^m}{2^n}$$

の和を求めよ.

[12] $a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_1 \in \mathbb{R}, \quad a_{n+2} = aa_{n+1} + ba_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき,

$$\frac{a_0 + (a_1 - aa_0)x}{1 - ax - bx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

が成り立つことを証明し, 右辺の収束半径を求めよ.

[13] $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ とする. $(-1, 1)$ 上の実解析関数 $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$\begin{cases} x(1-x)f''(x) + \{c - (a+b+1)x\}f'(x) - abf(x) = 0 & (-1 < x < 1), \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{a}{c} \end{cases}$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ.

(1) f を数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

と表すとき, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の漸化式を導け.

(2) f を 0 を中心とする整級数で表せ.

【補足】 $f = F(a, b, c; *)$ を超幾何級数と言う.

14 $a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ とする. $\mathbb{R}$ 上の実解析関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$\begin{cases} xf''(x) + (c-x)f'(x) - af(x) = 0 & (x \in \mathbb{R}), \\ f(0) = 1, f'(0) = \frac{a}{c} \end{cases}$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ.

(1) f を数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

と表すとき, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の漸化式を導け.

(2) f を 0 を中心とする整級数で表せ.

【補足】 $f = F(a, c; *)$ を合流型超幾何級数と言う.

15 $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ とし, $\mathbb{R}$ 上の整級数 f を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) f は $\mathbb{R}$ で実解析的である.

(2) $x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - m^2) f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

【補足】 $f = J_m$ を Bessel 関数と言う.

• Abel の定理

16 (Lambert 級数) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を数列とし, $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ 上の関数項級数 S を

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば, S は $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ で各点収束する.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散すれば, S は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束域で各点収束する.

17 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を 0 を中心とする収束半径 1 の整級数とすると, 次のことを証明せよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ が収束すれば, $f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$ が収束すれば, $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$.

5.3 初等関数の Taylor 級数

● 幾何級数, 指数関数, 対数関数, 冪関数

1 次の関数 f の 0 を中心とする Taylor 級数とその収束半径を求めよ.

$$(1) f(x) = \frac{1}{1 - 3x + 2x^2}.$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{2 - 5x + 2x^2}.$$

2 $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ とするとき, 次の $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ 上の関数

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 1)$$

の a を中心とする Taylor 級数とその収束半径を求めよ.

3 次の関数 f の 0 を中心とする Taylor 級数とその収束半径を求めよ.

$$(1) f(x) = e^{-x^2}.$$

$$(2) f(x) = a^x \quad (a > 0).$$

4 次の関数 f の 0 を中心とする Taylor 級数とその収束半径を求めよ.

$$(1) f(x) = \cosh x.$$

$$(2) f(x) = \sinh x.$$

5 (Bernoulli 数) 数列 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

$$(1) b_0 = 1, \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k = 0 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1).$$

$$(2) b_1 = -\frac{1}{2}, b_{2n+1} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1).$$

【ヒント】Cauchy 積の級数を用いる.

6 $(0, \infty)$ 上の関数 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \quad (x > 0)$$

によって定義するとき,

$$0 < f(x) < \frac{1}{4x(x+1)} \quad (x \geq 1)$$

が成り立つことを証明せよ.

7 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $\{\log a_n\}_{n \geq 1}$ は狭義単調減少かつ下に有界である.
- (2) (Stirling の公式) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2\pi}$.

【ヒント】 Wallis の公式を用いる.

8 次の関数 f の 0 を中心とする Taylor 級数とその収束半径を求めよ.

- (1) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$.
- (2) $f(x) = \log(1+x+x^2)$.

9 (Catalan 数) 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 次の整級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (x \neq 0)$$

の収束半径を求め, f を初等関数で表せ.

- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項を求めよ.

● 三角関数, 逆三角関数

10 次の関数 f の 0 を中心とする Taylor 級数とその収束半径を求めよ.

(1) $f(x) = \cos^3 x$.

(2) $f(x) = \sin^3 x$.

11 次の関数 f の 0 を中心とする Taylor 級数とその収束半径を求めよ.

(1) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(2) $f(x) = \arcsin x$.

12 (指定演習問題 10) 次の整級数 f の収束半径を求め, f を初等関数で表せ.

(1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)} x^{n+2}$.

(2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)2n} x^{2n}$.

13 次の級数が絶対収束することを証明し, その和を求めよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1}$.

14 次の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq -1)$$

によって定義するとき, f の原始関数 F を求めよ.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ が条件収束することを証明し, その和を求めよ.

15 次の問いに答えよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ の値を求めよ.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ が条件収束することを証明し, その和を求めよ.

【ヒント】 Wallis の公式を用いる.

関連図書

- [1] 齋藤 正彦, 微分積分学, 東京図書, 2006 年.
- [2] 杉浦 光夫, 解析入門 I(基礎数学), 東京大学出版会, 1980 年.
- [3] 難波 誠, 微分積分学 (数学シリーズ), 裳華房, 1996 年.