

微分積分学I 講義ノート

柿澤 亮平

島根大学学術研究院 教育学系 数学科教育専攻

目次

第 0 章	論理と集合	1
0.1	命題論理, 述語論理	1
0.2	集合, 写像	6
0.3	自然数, 整数, 有理数, 実数	12
第 1 章	初等関数の微積分法	18
1.1	指数関数, 対数関数, 冪関数	18
1.2	三角関数, 逆三角関数	22
1.3	有理関数	28
第 2 章	数列の極限と実数体の連続性	32
2.1	実数体の順序完備性	32
2.2	数列の極限	35
2.3	実数体の Cauchy 完備性	39
第 3 章	関数の極限と連続関数	46
3.1	関数の極限	46
3.2	連続関数, 一様連続関数, 半連続関数	54
3.3	中間値の定理, 逆関数の定理, 最大値の定理	58
第 4 章	導関数と平均値の定理	61
4.1	導関数と接線	61
4.2	平均値の定理	65
4.3	de l'Hôpital の法則	66
第 5 章	高階導関数と Taylor の定理	68
5.1	高階導関数と関数の極大・極小	68
5.2	Taylor の定理	70
5.3	初等関数の Taylor 多項式	71

第0章 論理と集合

0.1 命題論理, 述語論理

● 命題論理

定義 0.1.1. P, Q を命題とする.

(1) (論理同値) “ P の真偽と Q の真偽は一致する” という命題を $P \Leftrightarrow Q$ で表す.

(2) (論理否定) “ P でない” という命題を $\neg P$ で表す.

命題 0.1.1 (二重否定の法則). P を命題とすると, 次の命題

$$\neg\neg P \Leftrightarrow P$$

は真である.

証明. (真理表)

P	$\neg P$	$\neg\neg P$	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
真	偽	真	真
偽	真	偽	真

□

定義 0.1.2. P, Q を命題とする.

(1) (論理和) “ P または Q ” という命題を $P \vee Q$ で表す.

(2) (論理積) “ P かつ Q ” という命題を $P \wedge Q$ で表す.

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$
真	真	真	真
真	偽	真	偽
偽	真	真	偽
偽	偽	偽	偽

命題 0.1.2. P を命題とする.

(1) $P \vee \neg P$ は真である.

(2) $P \wedge \neg P$ は偽である.

証明. (真理表)

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$	$P \wedge \neg P$
真	偽	真	偽
偽	真	真	偽

□

命題 0.1.3. P, Q, R を命題とすると, 次の命題は真である.

(1) $P \vee P \Leftrightarrow P$.

(2) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$.

(3) $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.

(4) $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$.

証明. 省略 (真理表).

□

命題 0.1.4. P, Q, R を命題とすると, 次の命題は真である.

(1) $P \wedge P \Leftrightarrow P$.

(2) $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$.

(3) $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$.

(4) $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$.

証明. 省略 (真理表).

□

命題 0.1.5 (de Morgan の法則). P, Q を命題とすると, 次の命題は真である.

(1) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$.

(2) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$.

証明. 省略 (真理表).

□

定義 0.1.3. P, Q を命題とする.

(1) (論理包含) $\neg P \vee Q$ という命題を $P \Rightarrow Q$ で表す.

(2) (論理包含) $P \vee \neg Q$ という命題を $P \Leftarrow Q$ で表す.

命題 0.1.6 (論理同値の法則). P, Q を命題とすると, 次の命題

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Leftarrow Q) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$$

は真である.

証明. (真理表)

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
真	真	偽	偽	真	真	真
真	偽	偽	真	偽	真	偽
偽	真	真	偽	真	偽	偽
偽	偽	真	真	真	真	真

□

注意. P, Q を命題とすると, P が偽ならば, 次の命題

$$P \Rightarrow Q$$

は (形式的に) 真である.

定理 0.1.1 (モーダス・ポネンス). P, Q を命題とすると, 次の命題

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

は真である.

$$\begin{aligned}
 \text{証明. } (P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow \neg(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \vee Q \\
 &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg(P \Rightarrow Q) \vee Q \\
 &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee \neg(P \Rightarrow Q) \\
 &\Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \vee \neg(P \Rightarrow Q).
 \end{aligned}$$

□

定理 0.1.2 (三段論法). P, Q, R を命題とすると, 次の命題

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

は真である.

$$\begin{aligned}
 \text{証明. } ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)) &\Leftrightarrow \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)) \vee (\neg P \vee R) \\
 &\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee \neg P \vee R \\
 &\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \vee ((Q \wedge \neg R) \vee R) \\
 &\Leftrightarrow ((P \vee \neg P) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \vee ((Q \vee R) \wedge (R \vee \neg R)) \\
 &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee Q \vee R \\
 &\Leftrightarrow (Q \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee R) \\
 &\Leftrightarrow (Q \vee \neg Q) \vee (P \Rightarrow R) \\
 &\Leftrightarrow Q \vee \neg Q.
 \end{aligned}$$

□

定理 0.1.3 (背理法). P, Q を命題とすると, 次の命題

$$(\neg Q \Rightarrow P \wedge \neg P) \Rightarrow Q$$

は真である.

$$\begin{aligned} \text{証明. } ((\neg Q \Rightarrow P \wedge \neg P) \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow \neg(\neg\neg Q \vee (P \wedge \neg P)) \vee Q \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \wedge \neg(P \wedge \neg P)) \vee Q \\ &\Leftrightarrow (\neg Q \wedge (\neg P \vee P)) \vee Q \\ &\Leftrightarrow ((P \vee \neg P) \wedge \neg Q) \vee Q \\ &\Leftrightarrow \neg Q \vee Q \\ &\Leftrightarrow Q \vee \neg Q. \end{aligned}$$

□

定理 0.1.4 (対偶の法則). P, Q を命題とすると, 次の命題

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftarrow \neg Q)$$

は真である.

$$\begin{aligned} \text{証明. } (P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg\neg Q) \\ &\Leftrightarrow ((\neg P) \vee \neg(\neg Q)) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \Leftarrow \neg Q). \end{aligned}$$

□

● 述語論理

定義 0.1.4. $P(x)$ を変数 x についての命題とする.

(1) (特称記号) “ある変数 x が存在して $P(x)$ ” という命題を $\exists x, P(x)$ で表す.

(2) (全称記号) “任意の変数 x に対して $P(x)$ ” という命題を $\forall x, P(x)$ で表す.

注意. “ある変数 x が一意に存在して $P(x)$ ” という命題を $\exists! x, P(x)$ で表すことがある.

命題 0.1.7 (de Morgan の法則). $P(x)$ を変数 x についての命題とすると, 次の命題は真である.

(1) $\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$.

(2) $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$.

証明. 省略 (論理公理, 推論規則, 命題 0.1.1). □

命題 0.1.8. $P(x), Q(x)$ を変数 x についての命題とすると, 次の命題は真である.

(1) $\exists x, P(x) \vee Q(x) \Leftrightarrow (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x))$.

(2) $\forall x, P(x) \wedge Q(x) \Leftrightarrow (\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x))$.

証明. 省略 (論理公理, 変数条件, 命題 0.1.1). □

命題 0.1.9. $P(x, y)$ を変数 (x, y) についての命題とすると, 次の命題は真である.

(1) $\exists x, \exists y, P(x, y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x, P(x, y)$.

(2) $\forall x, \forall y, P(x, y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x, P(x, y)$.

証明. 省略 (論理公理, 変数条件, 命題 0.1.1). □

命題 0.1.10. $P(x, y)$ を変数 (x, y) についての命題とすると, 次の命題

$$\exists y, \forall x, P(x, y) \Rightarrow \forall x, \exists y, P(x, y)$$

は真である.

証明. 省略 (論理公理, 変数条件). □

注意. $P(x, y)$ を変数 (x, y) についての命題とするとき, 次の命題

$$\exists y, \forall x, P(x, y) \Leftarrow \forall x, \exists y, P(x, y)$$

が真であるとは限らない.

0.2 集合, 写像

• 集合

定義 0.2.1. A, B を集合とする.

- (1) 変数 x が A の元であることを $x \in A$ と書く.
- (2) 変数 x が A の元でないことを $x \notin A$ と書く.
- (3) $\forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ のことを $A = B$ と書く.

定義 0.2.2. A, B を集合とする.

- (1) $\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$ のことを $A \subseteq B$ と書き, A を B の部分集合と言う.
- (2) $\forall x, (x \in A \Leftarrow x \in B)$ のことを $A \supseteq B$ と書き, B を A の部分集合と言う.

定義 0.2.3. A, B を集合とする.

- (1) $(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$ のことを $A \subsetneq B$ と書き, A を B の真部分集合と言う.
- (2) $(A \supseteq B) \wedge (A \neq B)$ のことを $A \supsetneq B$ と書き, B を A の真部分集合と言う.

注意. A, B を集合とすると, 次の命題

$$(A \subseteq B) \wedge (A \supseteq B) \Leftrightarrow (A = B)$$

は真である.

定義 0.2.4. $P(x)$ を変数 x についての命題とする.

- (1) $P(x)$ が真である変数 x 全体の集合を $\{x; P(x)\}$ と書く.
- (2) $\forall x, x \notin \emptyset$ が真である集合 $\emptyset$ を空集合と言う.

注意. A を集合とすると, 次の命題

$$\emptyset \subseteq A$$

は (形式的に) 真である.

定義 0.2.5. A, B を集合とする.

- (1) $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$ を A と B の和または合併と言う.
- (2) $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ を A と B の積または共通部分と言う.

例. $A = \{a, b\}, B = \{b, c\}$ とおくと,

$$A \cup B = \{a, b, c\}, \quad A \cap B = \{b\}$$

が成り立つ.

命題 0.2.1. A, B, C を集合とする.

- (1) $A \cup A = A$.
- (2) $A \cup B = B \cup A$.
- (3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- (4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

証明. 省略 (命題 0.1.3). □

命題 0.2.2. A, B, C を集合とする.

- (1) $A \cap A = A$.
- (2) $A \cap B = B \cap A$.
- (3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- (4) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

証明. 省略 (命題 0.1.4). □

定義 0.2.6. A, B を集合とする.

- (1) $A \setminus B = \{x ; (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ を A と B の差と言う.
- (2) $A \supseteq B$ のとき, $B^c = A \setminus B$ を A に対する B の補集合と言う.

例. $A = \{a, b\}, B = \{b, c\}$ とおくと,

$$A \setminus B = \{a\}, \quad B \setminus A = \{c\}$$

が成り立つ.

命題 0.2.3. X を集合, $*^c$ を X に対する $*$ の補集合, $A, B \subseteq X$ を X の部分集合とする.

- (1) $X^c = \emptyset, \emptyset^c = X$.
- (2) $A^{cc} = A$.
- (3) $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset$.
- (4) $A \subseteq B \Leftrightarrow A^c \supseteq B^c$.

証明. 省略 (命題 0.1.1, 命題 0.1.2, 定理 0.1.4). □

命題 0.2.4 (de Morgan の法則). X を集合, $*^c$ を X に対する $*$ の補集合, $A, B \subseteq X$ を X の部分集合とする.

- (1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- (2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

証明. 省略 (命題 0.1.5). □

● 集合族

定義 0.2.7. X を集合とする.

(1) 集合の集合を**集合族**と言う.

(2) X の部分集合全体の集合を $\mathcal{P}(X) = \{A; A \subseteq X\}$ と書き, $\mathcal{P}(X)$ を X の**冪集合**と言う.

例. $X = \{a, b, c\}$ とおくと,

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

が成り立つ.

定義 0.2.8. $\mathcal{A}$ を集合族とする.

(1) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x; \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}$ を $\mathcal{A}$ の**和**または**合併**と言う.

(2) $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x; \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}$ を $\mathcal{A}$ の**積**または**共通部分**と言う.

注意. I を集合とし, $\mathcal{A} = \{A_i; i \in I\}$ とおくと,

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{i \in I} A_i, \quad \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{i \in I} A_i$$

と書くと,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x; \exists i \in I, x \in A_i\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x; \forall i \in I, x \in A_i\}$$

が成り立つ.

命題 0.2.5. $\mathcal{A}$ を集合族, B を集合とする.

$$(1) \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right) \cap B = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (A \cap B).$$

$$(2) \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \right) \cup B = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (A \cup B).$$

証明. 省略 (命題 0.1.8). □

命題 0.2.6 (de Morgan の法則). X を集合, $*^c$ を X に対する $*$ の補集合, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を X の部分集合族とする.

$$(1) \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)^c = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c.$$

$$(2) \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \right)^c = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^c.$$

証明. 省略 (命題 0.1.7). □

● 写像

定義 0.2.9. X, Y を集合とする.

- (1) $X \times Y = \{(x, y) ; (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$ を X と Y の**直積**と言い, (x, y) を x と y の**組**と言う.
- (2) $X \times Y$ の部分集合を X から Y への**対応**と言う.

例. $X = \{a, b\}, Y = \{c, d\}$ とおくと,

$$X \times Y = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$$

が成り立つ.

定義 0.2.10. X, Y を集合, $R \subseteq X \times Y$ を $\forall x \in X, \exists! y \in Y, (x, y) \in R$ を満たす X から Y への対応とする.

- (1) 任意の $x \in X$ に対し,

$$(x, y) \in R$$

を満たす $y \in Y$ を $y = f(x)$ と書き, $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への**写像**と言う.

- (2) (1) のとき, X を f の**定義域**と言い, Y を f の**値域**と言う.

例. $X = \{a, b\}, Y = \{c, d\}$ とおくと, $R = \{(a, c), (b, d)\}$, つまり,

$$f(a) = c, \quad f(b) = d$$

は X から Y への写像である.

定義 0.2.11. X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への写像とする.

- (1) 任意の $A \subseteq X$ に対し, $f(A) = \{f(x) ; x \in A\}$ を f による A の**像**と言う.
- (2) 任意の $B \subseteq Y$ に対し, $f^{-1}(B) = \{x \in X ; f(x) \in B\}$ を f による B の**逆像**と言う.

例. $X = \{a, b\}, Y = \{c, d\}$ とおくと, $R = \{(a, c), (b, c)\}$, つまり,

$$f(a) = c, \quad f(b) = c$$

は X から Y への写像であり,

$$f(\{a\}) = \{c\}, \quad f(\{b\}) = \{c\}, \quad f(\{a, b\}) = \{c\}, \quad f(\emptyset) = \emptyset,$$

$$f^{-1}(\{c\}) = \{a, b\}, \quad f^{-1}(\{d\}) = \emptyset, \quad f^{-1}(\{c, d\}) = \{a, b\}, \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

が成り立つ.

定義 0.2.12. X, Y を集合, $f, g: X \rightarrow Y$ を X から Y への写像とする. f と g が**等しい**とは,

$$\forall x \in X, f(x) = g(x)$$

が成り立つことを言う. このとき, $f = g$ と書く.

定義 0.2.13. X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への写像とする.

(1) f が**全射**であるとは, f が $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ を満たすことを言う.

(2) f が**単射**であるとは, f が $\forall x, x' \in X, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$ を満たすことを言う.

(3) f が**全単射**であるとは, f が全射かつ単射であることを言う.

例. $X = \{a, b\}, Y = \{c\}$ とおくと, $R = \{(a, c), (b, c)\}$, つまり,

$$f(a) = c, \quad f(b) = c$$

は X から Y への全射であるが, 単射でない.

例. $X = \{a\}, Y = \{b, c\}$ とおくと, $R = \{(a, b)\}$, つまり,

$$f(a) = b$$

は X から Y への単射であるが, 全射でない.

注意. X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への全単射とすると, f は $\forall y \in Y, \exists! x \in X, f(x) = y$ を満たす.

定義 0.2.14. X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への全単射とする. 任意の $y \in Y$ に対し,

$$f(x) = y$$

を満たす $x \in X$ を $x = f^{-1}(y)$ と書き, $f^{-1}: Y \rightarrow X$ を f の**逆**と言う.

例. $X = \{a, b\}, Y = \{c, d\}$ とおくと, $R = \{(a, d), (b, c)\}$, つまり,

$$f(a) = d, \quad f(b) = c$$

は X から Y への全単射であり,

$$f^{-1}(c) = b, \quad f^{-1}(d) = a$$

が成り立つ.

定義 0.2.15. X, Y, Z を集合, $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ をそれぞれ X から Y, Y から Z への写像とする.

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

によって定義される $g \circ f: X \rightarrow Z$ を f と g の**合成**と言う.

例. $X = \{a, b\}$ とおくと, $R = \{(a, a), (b, a)\}, S = \{(a, b), (b, b)\}$, つまり,

$$f(a) = a, \quad f(b) = a, \quad g(a) = b, \quad g(b) = b$$

は X 上の変換であり,

$$g \circ f(a) = b, \quad g \circ f(b) = b, \quad f \circ g(a) = a, \quad f \circ g(b) = a$$

が成り立つ.

● 選択公理

定義 0.2.16. $\mathcal{A}$ を集合族とする.

$$\prod_{A \in \mathcal{A}} A = \left\{ f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A ; \forall A \in \mathcal{A}, f(A) \in A \right\}$$

を $\mathcal{A}$ の直積と言う.

注意. I を集合とし, $\mathcal{A} = \{A_i ; i \in I\}$ とおくとき,

$$\prod_{A \in \mathcal{A}} A = \prod_{i \in I} A_i$$

と書くと,

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i ; \forall i \in I, f(i) \in A_i \right\}$$

が成り立つ.

注意. I, A を集合とし, $\mathcal{A} = \{A_i = A ; i \in I\}$ とおくとき,

$$\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} A = A^I$$

と書くと,

$$A^I = \{f : I \rightarrow A ; \forall i \in I, f(i) \in A\} = \{f : I \rightarrow A\}$$

が成り立つ.

注意. $\mathcal{A}$ を集合族とすると, 次の命題

$$\exists A \in \mathcal{A}, A = \emptyset \Rightarrow \prod_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$$

は真である.

公理 0.2.1 (選択公理). $\mathcal{A}$ を集合族とすると, 次の命題

$$\forall A \in \mathcal{A}, A \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$$

は真である.

0.3 自然数, 整数, 有理数, 実数

● 実数体

定義 0.3.1. 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く.

公理 0.3.1. $\mathbb{R}$ は実数の加法・乗法について可換体である. つまり, 次の (i)–(x) を満たす.

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$ ($x, y, z \in \mathbb{R}$).

(ii) $\exists! 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = x = 0 + x$.

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! -x \in \mathbb{R}, x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

(iv) $x + y = y + x$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

(v) $(xy)z = x(yz)$ ($x, y, z \in \mathbb{R}$).

(vi) $\exists! 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}, x1 = x = 1x$.

(vii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists! x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$.

(viii) $xy = yx$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

(ix) $(x + y)z = xz + yz$ ($x, y, z \in \mathbb{R}$).

(x) $x(y + z) = xy + xz$ ($x, y, z \in \mathbb{R}$).

注意 (減法, 除法). (iii) の $x + (-y)$ を $x - y$ と書き, (vii) の xy^{-1} を $\frac{x}{y}$ と書く.

命題 0.3.1.

(1) $-(-x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$).

(2) $(x^{-1})^{-1} = x$ ($x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

(3) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ ($x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

証明. 省略 (公理 0.3.1). □

命題 0.3.2.

(1) $x0 = 0x = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

(2) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

(3) $(-x)(-y) = xy$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

証明. 省略 (公理 0.3.1). □

命題 0.3.3. $\mathbb{R}$ は実数の加法・乗法について整域である. つまり,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (xy = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0))$$

を満たす.

証明. 省略 (公理 0.3.1). □

公理 0.3.2. $\mathbb{R}$ は実数の大小相等について全順序集合である. つまり, 次の (i)–(iv) を満たす.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x.$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, ((x \leq y) \wedge (x \geq y) \Rightarrow x = y).$

(iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, ((x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z).$

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \vee (x \geq y).$

命題 0.3.4. 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し, 次の (i)–(iii) のいずれか一つだけが成り立つ.

(i) $x < y.$

(ii) $x = y.$

(iii) $x > y.$

証明. 省略 (公理 0.3.2). □

公理 0.3.3. $\mathbb{R}$ は実数の加法・乗法・大小相等について順序体である. つまり, 次の (i), (ii) を満たす.

(i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z).$

(ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, ((x \leq y) \wedge (z \geq 0) \Rightarrow xz \leq yz).$

命題 0.3.5.

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, ((x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \Rightarrow x + y \geq 0).$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}, ((x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0).$

証明. 省略 (公理 0.3.1, 公理 0.3.3). □

命題 0.3.6.

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, ((x > 0) \wedge (y > 0) \Rightarrow xy > 0).$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}, ((x > 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow xy < 0).$

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}, ((x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow xy > 0).$

(4) $\forall x \in \mathbb{R}, (x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0).$

証明. 省略 (公理 0.3.1, 公理 0.3.3). □

命題 0.3.7.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0).$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}, ((x < y) \wedge (x > 0) \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}).$

証明. 省略 (公理 0.3.1, 公理 0.3.3). □

定義 0.3.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とする. I が $\mathbb{R}$ の区間であるとは, I が

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, (a, b \in I \Rightarrow \{(1-t)a + tb ; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq I)$$

を満たすことを言う.

定理 0.3.1. 空でない $\mathbb{R}$ の区間は次の (i)–(vi) だけである.

- (i) (开区間) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\}$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$).
- (ii) (闭区间) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$).
- (iii) (半开区間) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} ; a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x < b\}$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$).
- (iv) (開半直線) $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} ; x > a\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} ; x < b\}$ ($a, b \in \mathbb{R}$).
- (v) (閉半直線) $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} ; x \geq a\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} ; x \leq b\}$ ($a, b \in \mathbb{R}$).
- (vi) (数直線) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

証明. 省略.

□

● 自然数

定義 0.3.3. $A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とする.

(1) A が**継承的**であるとは, A が次の (i), (ii) を満たすことを言う.

(i) $0 \in A$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{R}, (n \in A \Rightarrow n+1 \in A)$.

(2) $\mathbb{R}$ の継承的部分集合全体の集合を $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{A \subseteq \mathbb{R}; A \text{ は継承的である}\}$ と書く.

例. $\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の**最大の継承的部分集合**である.

例. $\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}(\mathbb{R})} A$ は $\mathbb{R}$ の**最小の継承的部分集合**である.

命題 0.3.8. $\forall A \subseteq \mathbb{R}, (A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \supseteq \mathbb{N})$.

証明. 省略 (定義 0.3.3). □

定義 0.3.4. $0+1=1, 1+1=2, 2+1=3, \dots, \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ と書き, $\mathbb{N}$ の元を**自然数**と言う.

定理 0.3.2 (数学的帰納法の原理). $\forall A \subseteq \mathbb{N}, (A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \mathbb{N})$.

証明. 省略 (命題 0.3.8). □

$\mathbb{N}, \mathbb{R}$ の包含関係

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{R}.$$

定義 0.3.5. A, B を集合とする.

(1) A から B への全単射 $f: A \rightarrow B$ が存在することを $\sharp(A) = \sharp(B)$ と書く.

(2) $n = 0 \Rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\} = \emptyset, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sharp(\{0, 1, \dots, n-1\}) = n$ と書き, n を**個数**と言う.

(3) $\sharp(\mathbb{N}) = \aleph_0, \sharp(\mathbb{R}) = \beth_1$ と書き, $\aleph_0, \beth_1$ をそれぞれ**可算濃度**, **連続濃度**と言う.

例. $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ とし, $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ とおくと, $\sharp(A) = n$.

例 (素数). $A = \{p \in \mathbb{N}; p \text{ は素数である}\}$ とおくと, $\sharp(A) = \aleph_0$.

定義 0.3.6. A を集合とする.

(1) A が**有限** (finite) であるとは, A が $\exists n \in \mathbb{N}, \sharp(A) = n$ を満たすことを言う.

(2) A が**可算無限**であるとは, A が $\sharp(A) = \aleph_0$ を満たすことを言う.

(3) A が**連続無限**であるとは, A が $\sharp(A) = \beth_1$ を満たすことを言う.

例. $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ とし, $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ とおくと, A は有限である.

例 (素数). $A = \{p \in \mathbb{N}; p \text{ は素数である}\}$ とおくと, A は可算無限である.

● 整数環

定義 0.3.7. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ と書き, $\mathbb{Z}$ の元を**整数**と言う.

命題 0.3.9. $\mathbb{Z}$ は実数の加法・乗法について**可換環**である. つまり, 次の (i)–(ix) を満たす.

$$(i) \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad (x, y, z \in \mathbb{Z}).$$

$$(ii) \quad \exists! 0 \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}, x + 0 = x = 0 + x.$$

$$(iii) \quad \forall x \in \mathbb{Z}, \exists! -x \in \mathbb{Z}, x + (-x) = 0 = (-x) + x.$$

$$(iv) \quad x + y = y + x \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

$$(v) \quad (xy)z = x(yz) \quad (x, y, z \in \mathbb{Z}).$$

$$(vi) \quad \exists! 1 \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}, x1 = x = 1x.$$

$$(vii) \quad xy = yx \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

$$(viii) \quad (x + y)z = xz + yz \quad (x, y, z \in \mathbb{Z}).$$

$$(ix) \quad x(y + z) = xy + xz \quad (x, y, z \in \mathbb{Z}).$$

証明. 省略 (公理 0.3.1). □

命題 0.3.10. $\mathbb{Z}$ は実数の大小相等について全順序集合である. つまり, 次の (i)–(iv) を満たす.

$$(i) \quad \forall x \in \mathbb{Z}, x \leq x.$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}, ((x \leq y) \wedge (x \geq y) \Rightarrow x = y).$$

$$(iii) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Z}, ((x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z).$$

$$(iv) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}, (x \leq y) \vee (x \geq y).$$

証明. 省略 (公理 0.3.2). □

命題 0.3.11. $\mathbb{Z}$ は実数の加法・乗法・大小相等について**順序環**である. つまり, 次の (i), (ii) を満たす.

$$(i) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Z}, (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z).$$

$$(ii) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Z}, ((x \leq y) \wedge (z \geq 0) \Rightarrow xz \leq yz).$$

証明. 省略 (公理 0.3.3). □

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ の包含関係

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}.$$

● 有理数体

定義 0.3.8. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} ; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ と書き, $\mathbb{Q}$ の元を**有理数**と言う.

命題 0.3.12. $\mathbb{Q}$ は実数の加法・乗法について可換体である. つまり, 次の (i)–(x) を満たす.

- (i) $(x + y) + z = x + (y + z) \ (x, y, z \in \mathbb{Q}).$
- (ii) $\exists! 0 \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{Q}, x + 0 = x = 0 + x.$
- (iii) $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists! -x \in \mathbb{Q}, x + (-x) = 0 = (-x) + x.$
- (iv) $x + y = y + x \ (x, y \in \mathbb{Q}).$
- (v) $(xy)z = x(yz) \ (x, y, z \in \mathbb{Q}).$
- (vi) $\exists! 1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \forall x \in \mathbb{Q}, x1 = x = 1x.$
- (vii) $\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \exists! x^{-1} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, xx^{-1} = 1 = x^{-1}x.$
- (viii) $xy = yx \ (x, y \in \mathbb{Q}).$
- (ix) $(x + y)z = xz + yz \ (x, y, z \in \mathbb{Q}).$
- (x) $x(y + z) = xy + xz \ (x, y, z \in \mathbb{Q}).$

証明. 省略 (公理 0.3.1). □

命題 0.3.13. $\mathbb{Q}$ は実数の大小相等について全順序集合である. つまり, 次の (i)–(iv) を満たす.

- (i) $\forall x \in \mathbb{Q}, x \leq x.$
- (ii) $\forall x, y \in \mathbb{Q}, ((x \leq y) \wedge (x \geq y) \Rightarrow x = y).$
- (iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, ((x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z).$
- (iv) $\forall x, y \in \mathbb{Q}, (x \leq y) \vee (x \geq y).$

証明. 省略 (公理 0.3.2). □

命題 0.3.14. $\mathbb{Q}$ は実数の加法・乗法・大小相等について順序体である. つまり, 次の (i), (ii) を満たす.

- (i) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z).$
- (ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, ((x \leq y) \wedge (z \geq 0) \Rightarrow xz \leq yz).$

証明. 省略 (公理 0.3.3). □

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ の包含関係

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

第1章 初等関数の微積分法

1.1 指数関数, 対数関数, 冪関数

● 指数関数

定義 1.1.1. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ を **Napier 数** と言う.

定義 1.1.2.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$e^n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ \underbrace{e \cdots e}_{n \text{ 個}} & (n \geq 1), \end{cases} \quad e^{-n} = \frac{1}{e^n}$$

をそれぞれ e の n 乗, $-n$ 乗と言う.

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対し,

$$e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}, \quad e^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{e^{\frac{m}{n}}}$$

をそれぞれ e の $\frac{m}{n}$ 乗, $-\frac{m}{n}$ 乗と言う.

(3) 任意の $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (定義 0.2.4) に対し, $\{r_n\}$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ となる有理数列とする.

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{r_n}$$

を e の x 乗と言う.

命題 1.1.1.

(1) (加法定理) $e^x e^y = e^{x+y}$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

(2) $(e^x)^y = (e^y)^x = e^{xy}$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

証明. 省略 (高等学校数学 II). □

定義 1.1.3. 次の関数

$$\exp x = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義される $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ を **指数関数** と言う.

● 対数関数

定義 1.1.4. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ の逆関数 $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を**対数関数**と言う. つまり, 任意の $x > 0$ に対し,

$$\exp y = x$$

を満たす $y \in \mathbb{R}$ を $y = \log x$ と書き, $\log x$ を x の**対数**と言う.

命題 1.1.2.

(1) $\exp(\log x) = x \ (x > 0).$

(2) $\log(\exp y) = y \ (y \in \mathbb{R}).$

(3) $\log 1 = 0.$

(4) $\log e = 1.$

証明. 省略 (高等学校数学 II).

□

命題 1.1.3.

(1) (加法定理) $\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2 \ (x_1, x_2 > 0).$

(2) $\log \frac{1}{x} = -\log x \ (x > 0).$

証明. 省略 (高等学校数学 II).

□

● 冪関数

定義 1.1.5. $a > 0$ とする. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$a^x = \exp(x \log a)$$

を a の x 乗と言う.

命題 1.1.4. $a, b > 0$ とする.

(1) (加法定理) $a^x a^y = a^{x+y}$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

(2) $\log(a^x) = x \log a$ ($x \in \mathbb{R}$).

(3) $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

(4) $(ab)^x = a^x b^x$ ($x \in \mathbb{R}$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.1.5. $a > 0$ とする.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a^n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ 個}} & (n \geq 1), \end{cases} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

が成り立つ.

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

が成り立つ.

(3) 任意の $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (定義 0.2.4) に対し, $\{r_n\}$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ となる有理数列とすると,

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 指数関数, 対数関数, 冪関数の微積分法

命題 1.1.6. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp h - 1}{h} = 1.$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.1.7. $\exp$ は $\mathbb{R}$ で微分可能であり,

$$(\exp x)' = \exp x, \quad \int \exp x dx = \exp x \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.1.8. $\log$ は $(0, \infty)$ で微分可能であり,

$$(\log x)' = \frac{1}{x}, \quad \int \frac{1}{x} dx = \log x \quad (x > 0)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 1.1.6. $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. 次の関数

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log x) \quad (x > 0)$$

によって定義される $*^\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を**冪関数**と言う.

命題 1.1.9. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ とすると, $*^\alpha$ は $(0, \infty)$ で微分可能であり,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \int x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} x^\alpha \quad (x > 0)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 1.1.7. $a > 0$ とする. 次の関数

$$a^x = \exp(x \log a) \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義される $a^* : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ を**冪関数**と言う.

命題 1.1.10. $a > 0$, $a \neq 1$ とすると, a^* は $\mathbb{R}$ で微分可能であり,

$$(a^x)' = (\log a)a^x, \quad \int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

1.2 三角関数, 逆三角関数

● 弧度法, 三角比

定義 1.2.1.

- (1) 単位円を $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} ; x^2 + y^2 = 1\}$ (定義 0.2.7) と書く.
- (2) 円周率を π と書く.

定義 1.2.2 (弧度法). $(1, 0)$ と $(x, y) \in C$ を反時計回りに結ぶ C 上の弧を $A(x, y)$ とする.

- (1) 任意の $(x, y) \in C$ に対し, $A(x, y)$ の長さを $l(A(x, y))$ と書く.
- (2) 任意の $(x, y) \in C$ に対し,

$$\theta = l(A(x, y))$$

を満たす $\theta \in [0, 2\pi)$ を角 $(1, 0), (0, 0), (x, y)$ の**弧度**と言う.

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

定義 1.2.3 (三角比). $(1, 0)$ と $(x, y) \in C$ を反時計回りに結ぶ C 上の弧を $A(x, y)$ とする.

- (1) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し,

$$l(A(x, y)) \equiv \theta \pmod{2\pi}$$

を満たす $(x, y) \in C$ を $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ と書き, $\cos \theta, \sin \theta$ をそれぞれ θ の**余弦**, **正弦**と言う.

- (2) 任意の $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi$ (定義 0.2.4) に対し, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ を θ の**正接**と言う.

● 三角関数

定義 1.2.4.

(1) 次の関数

$$\begin{cases} \cos x = (x \text{ の余弦}) & (x \in \mathbb{R}), \\ \sin x = (x \text{ の正弦}) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

によって定義される $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ をそれぞれ余弦関数, 正弦関数と言う.

(2) 次の関数

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義される $\tan : \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi \rightarrow \mathbb{R}$ (定義 0.2.4) を正接関数と言う.

命題 1.2.1.

(1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

(2) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi\right).$

証明. 省略 (高等学校数学 II). □

命題 1.2.2.

(1) $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x & (x \in \mathbb{R}), \\ \sin(-x) = -\sin x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$

(2) $\tan(-x) = -\tan x \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi\right).$

証明. 省略 (高等学校数学 II). □

命題 1.2.3.

(1) $\begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x & (x \in \mathbb{R}), \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$

(2) $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi).$

証明. 省略 (高等学校数学 II). □

命題 1.2.4.

(1) $\begin{cases} \cos(x + \pi) = -\cos x & (x \in \mathbb{R}), \\ \sin(x + \pi) = -\sin x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$

(2) $\tan(x + \pi) = \tan x \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi\right).$

証明. 省略 (高等学校数学 II).

□

命題 1.2.5.

$$(1) \begin{cases} \cos(x + 2\pi) = \cos x & (x \in \mathbb{R}), \\ \sin(x + 2\pi) = \sin x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

$$(2) \tan(x + 2\pi) = \tan x \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right) \pi \right).$$

証明. 省略 (高等学校数学 II).

□

命題 1.2.6 (加法定理).

$$(1) \begin{cases} \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y & (x, y \in \mathbb{R}), \\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y & (x, y \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

$$(2) \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \left(x, y \in \mathbb{R}, x, y, x + y \notin \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right) \pi \right).$$

証明. 省略 (高等学校数学 II).

□

● 逆三角関数

定義 1.2.5. $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ の逆関数 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を**逆正弦関数**と言う。つまり、任意の $-1 \leq x \leq 1$ に対し、

$$\sin y = x$$

を満たす $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ を $y = \arcsin x$ と書き、 $\arcsin x$ を x の**逆正弦**と言う。

定義 1.2.6. $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ の逆関数 $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ を**逆余弦関数**と言う。つまり、任意の $-1 \leq x \leq 1$ に対し、

$$\cos y = x$$

を満たす $0 \leq y \leq \pi$ を $y = \arccos x$ と書き、 $\arccos x$ を x の**逆余弦**と言う。

定義 1.2.7. $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ の逆関数 $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を**逆正接関数**と言う。つまり、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\tan y = x$$

を満たす $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ を $y = \arctan x$ と書き、 $\arctan x$ を x の**逆正接**と言う。

命題 1.2.7.

$$(1) \arcsin(-x) = -\arcsin x \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$(2) \arctan(-x) = -\arctan x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.2.8.

$$(1) \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$(2) \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (x > 0), \\ -\frac{\pi}{2} & (x < 0). \end{cases}$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 三角関数, 逆三角関数の微積分法

命題 1.2.9. $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, x \neq 0\right).$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.2.10.
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \end{cases}$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.2.11.

(1) $\cos, \sin$ は $\mathbb{R}$ で微分可能であり,

$$\begin{cases} (\cos x)' = -\sin x, & \int \sin x dx = -\cos x \quad (x \in \mathbb{R}), \\ (\sin x)' = \cos x, & \int \cos x dx = \sin x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

が成り立つ.

(2) $\tan$ は $\mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi$ で微分可能であり,

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.2.12.

(1) $\arcsin$ は $(-1, 1)$ で微分可能であり,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つ.

(2) $\arccos$ は $(-1, 1)$ で微分可能であり,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つ.

(3) $\arctan$ は $\mathbb{R}$ で微分可能であり,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 1.2.13. $a > 0$ とする.

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} \quad (-a < x < a).$$

$$(2) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) \quad (-a < x < a).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 1.2.14. $a > 0$ とする.

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\arccos \frac{x}{a} \quad (-a < x < a).$$

$$(2) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

1.3 有理関数

• 部分分数分解

定義 1.3.1. $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \{0, 1, \dots, n\}$), $a_n \neq 0$ とする.

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

によって定義される p を**多項式**と言う. また, $\deg(p) = n$ と書き, n を p の**次数** (degree) と言う.

定義 1.3.2. p, q を多項式とする.

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

によって定義される r を**有理式**と言う. 特に, $\deg(p) < \deg(q)$ のとき, r を**真分数式**と言う.

命題 1.3.1. 任意の多項式 p, d に対し, 次の (i), (ii) を満たす多項式 q, r が一意に存在する.

(i) $\deg(r) < \deg(d)$.

(ii) $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$.

証明. 省略. □

命題 1.3.2 (部分分数分解). $\deg(p) < \deg(q)$ を満たす任意の多項式 p, q に対し,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{n=1}^{n_1} \sum_{m=1}^{m_k} \frac{c_{mn}}{(x - a_n)^m} + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} \sum_{m=1}^{m_k} \frac{d_{mn}x + e_{mn}}{\{(x - a_n)^2 + b_n^2\}^m}$$

を満たす $c_{mn} \in \mathbb{R}$ ($n \in \{1, \dots, n_1\}$), $d_{mn}, e_{mn} \in \mathbb{R}$ ($n \in \{n_1 + 1, \dots, n_2\}$) ($m \in \{1, \dots, m_n\}$) が一意に存在する. ただし,

- $n_1 \in \mathbb{N}$ は $q(x) = 0$ の相異なる実根の個数.
- $n_2 \in \mathbb{N}$ は $q(x) = 0$ の相異なる根の個数.
- $a_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \{1, \dots, n_1\}$) は $q(x) = 0$ の実根.
- $a_n + ib_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ($n \in \{n_1 + 1, \dots, n_2\}$) は $q(x) = 0$ の複素根.
- $m_n \in \mathbb{N}$, $m_n \geq 1$ ($n \in \{1, \dots, n_1\}$) は a_n の重複度.
- $m_n \in \mathbb{N}$, $m_n \geq 1$ ($n \in \{n_1 + 1, \dots, n_2\}$) は $a_n + ib_n$ の重複度.

証明. 省略. □

● 有理関数の積分法 I

例.

$$(1) \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

$$(2) \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} dx = \log \left(x - \frac{1}{x} \right).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

例.

$$(1) \frac{x+1}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{1}{9} \left\{ \frac{6}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right\}.$$

$$(2) \int \frac{x+1}{(x+2)(x-1)^2} dx = \frac{1}{9} \left(\log \frac{x-1}{x+2} - \frac{6}{x-1} \right).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

例.

$$(1) \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} \right).$$

$$(2) \int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \left(\log \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + \arctan x \right).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 有理関数の積分法 II

命題 1.3.3.

(1) $t = \tan \frac{x}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

が成り立つ.

(2) r を (2 変数の) 有理式とすると,

$$\int r(\cos x, \sin x) dx = \int r\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \log \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 1.3.4.

(1) $t = \tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

が成り立つ.

(2) r を (2 変数の) 有理式とすると,

$$\int r(\cos^2 x, \sin^2 x) dx = \int r\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x}.$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 有理関数の積分法 III

命題 1.3.5. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ とする.

(1) $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x$ ($x \in \mathbb{R}$) とおくと,

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{at^2 + bt + \sqrt{ac}}}{2\sqrt{at} + b}$$

が成り立つ.

(2) r を (2 変数の) 有理式とすると,

$$\int r(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int r\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}, \frac{\sqrt{at^2 + bt + \sqrt{ac}}}{2\sqrt{at} + b}\right) \frac{2(\sqrt{at^2 + bt + \sqrt{ac}})}{(2\sqrt{at} + b)^2} dt$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 1.3.6. $c > 0$ とする.

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + c}} dx = \log(x + \sqrt{x^2 + c}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$(2) \int \sqrt{x^2 + c} dx = \frac{1}{2} \{x\sqrt{x^2 + c} + c \log(x + \sqrt{x^2 + c})\} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

第2章 数列の極限と実数体の連続性

2.1 実数体の順序完備性

● Dedekind の公理

定義 2.1.1. K を $\mathbb{Q}$ または $\mathbb{R}$, $(A, B) \in \mathcal{P}(K)^2 = \mathcal{P}(K) \times \mathcal{P}(K)$ (定義 0.2.5), $A, B \neq \emptyset$ を A と B の組 (定義 0.2.7) とする. (A, B) が次の (i), (ii) を満たすとき, (A, B) を K の**切断**と言う.

- (i) $A \cup B = K, A \cap B = \emptyset$.
- (ii) 任意の $a \in A, b \in B$ に対して $a < b$.

定義 2.1.2. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合, $x \in \mathbb{R}$ とする.

- (1) $x \in A$, かつ任意の $a \in A$ に対して $a \leq x$ のとき, x を A の**最大元**と言い, $x = \max A$ と書く.
- (2) $x \in A$, かつ任意の $a \in A$ に対して $a \geq x$ のとき, x を A の**最小元**と言い, $x = \min A$ と書く.

注意. 最大元・最小元が存在すれば, それらは一意である.

公理 2.1.1 (Dedekind の公理). $\mathbb{R}$ の任意の切断 (A, B) は次の (i), (ii) のいずれか一つだけを満たす.

- (i) $\max A$ は存在せず, $\min B$ が存在する.
- (ii) $\max A$ が存在し, $\min B$ は存在しない.

例. $a > 1$ とする.

- (1) $B = \{x \in \mathbb{R} ; x > 0, x^2 > a\}, A = \mathbb{R} \setminus B$ (定義 0.2.4) とおくと, (A, B) は $\mathbb{R}$ の切断である.
- (2) $x^2 = a$ を満たす $x > 0$ が一意に存在する. これより, $x = \sqrt{a}$ と書き, $\sqrt{a}$ を a の正の**平方根**と言う.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例 (無理数). $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (定義 0.2.4).

証明. 省略 (高等学校数学 I). □

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ の包含関係

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

● 上限公理, 下限公理

定義 2.1.3. $A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合, $x \in \mathbb{R}$ とする.

- (1) 任意の $a \in A$ に対して $a \leq x$ のとき, x を A の**上界**と言う. また, A の上界全体の集合を

$$U(A) = \{x \in \mathbb{R} ; \forall a \in A, a \leq x\}$$

と書く.

- (2) 任意の $a \in A$ に対して $a \geq x$ のとき, x を A の**下界**と言う. また, A の下界全体の集合を

$$L(A) = \{x \in \mathbb{R} ; \forall a \in A, a \geq x\}$$

と書く.

定義 2.1.4. $A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とする.

- (1) A が**上に**有界であるとは, $U(A) \neq \emptyset$ のことを言う.
(2) A が**下に**有界であるとは, $L(A) \neq \emptyset$ のことを言う.
(3) A が**有界**であるとは, A が上に有界かつ下に有界であることを言う.

定義 2.1.5. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とする.

- (1) A が上に有界のとき, $\sup A = \min U(A)$ を A の**上限**と言う.
(2) A が下に有界のとき, $\inf A = \max L(A)$ を A の**下限**と言う.

命題 2.1.1. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \sup A$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

- (i) α は A の上界である.
(ii) 任意の $x < \alpha$ に対し, $x < a(x)$ を満たす $a(x) \in A$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.1.2. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \inf A$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことである.

- (i) α は A の下界である.
(ii) 任意の $x > \alpha$ に対し, $x > a(x)$ を満たす $a(x) \in A$ が存在する.

証明. 省略 (命題 2.1.1). □

命題 2.1.3. $A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とする.

- (1) $\max A$ が存在すれば, $A \neq \emptyset$ は上に有界であり, $\sup A = \max A$ が成り立つ.
(2) $\min A$ が存在すれば, $A \neq \emptyset$ は下に有界であり, $\inf A = \min A$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

公理 2.1.2 (上限公理). $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とすると, A が上に有界ならば, $\sup A$ が存在する.

公理 2.1.3 (下限公理). $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とすると, A が下に有界ならば, $\inf A$ が存在する.

● 実数体の連続性 I

補題 2.1.1. $A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とし, $-A = \{-a ; a \in A\}$ とおくと, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $A \neq \emptyset$ は下に有界であり, $\inf A$ が存在する.
- (ii) $-A \neq \emptyset$ は上に有界であり, $\sup(-A)$ が存在する.

さらに, A が (i) または (ii) を満たせば,

$$\sup(-A) = -\inf A$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

補題 2.1.2. $A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とし, $-A = \{-a ; a \in A\}$ とおくと, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $A \neq \emptyset$ は上に有界であり, $\sup A$ が存在する.
- (ii) $-A \neq \emptyset$ は下に有界であり, $\inf(-A)$ が存在する.

さらに, A が (i) または (ii) を満たせば,

$$\inf(-A) = -\sup A$$

が成り立つ.

証明. 省略 (補題 2.1.1). □

定理 2.1.1 (実数体の順序完備性). 次の (i)–(iii) は互いに同値である.

- (i) Dedekind の公理.
- (ii) 上限公理.
- (iii) 下限公理.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

2.2 数列の極限

● 実数体上のノルム・距離

定義 2.2.1. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & (x \geq 0), \\ -x & (x \leq 0) \end{cases}$$

を x のノルムまたは絶対値と言う.

命題 2.2.1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ はノルム空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, (|x| \geq 0) \wedge (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

(ii) (三角不等式) $|x + y| \leq |x| + |y|$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

(iii) $|xy| = |x||y|$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 2.2.2. 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$d(x, y) = |x - y|$$

を x と y の距離と言う.

命題 2.2.2. $(\mathbb{R}, d)$ は距離空間である. つまり, 次の (i)–(iii) を満たす.

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}, (d(x, y) \geq 0) \wedge (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$.

(ii) (三角不等式) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ($x, y, z \in \mathbb{R}$).

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 数列の収束・発散

定義 2.2.3. $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (定義 0.2.8) を数列または実数列と言う。このとき、

$$a(n) = a_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

と書き, a_n を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の一般項と言う。

定義 2.2.4 (ε - N 論法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする. $n \rightarrow \infty$ のとき, a_n が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ と書く。

定義 2.2.4 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon).$$

定義 2.2.5 (M - N 論法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする. $n \rightarrow \infty$ のとき, a_n が ∞ に発散するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $N(M) \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N(M)$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_n > M$$

が成り立つことを言う。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ と書く。

定義 2.2.5 の論理式

$$\forall M > 0, \exists N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N(M) \Rightarrow a_n > M).$$

定義 2.2.6 (M - N 論法). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする. $n \rightarrow \infty$ のとき, a_n が $-\infty$ に発散するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $N(M) \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N(M)$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_n < -M$$

が成り立つことを言う。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ と書く。

定義 2.2.6 の論理式

$$\forall M > 0, \exists N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N(M) \Rightarrow a_n < -M).$$

注意. 数列の有限個の項を付け加えたり取り除いたりしても, その数列の収束・発散には関係しない。

命題 2.2.3. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とするとき, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は一意である。

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

定義 2.2.7. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とし, $a(\mathbb{N}) = \{a_n ; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ (定義 0.2.9) とおく.

- (1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が上に有界であるとは, $a(\mathbb{N})$ が上に有界であることを言う.
- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が下に有界であるとは, $a(\mathbb{N})$ が下に有界であることを言う.
- (3) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界であるとは, $a(\mathbb{N})$ が有界であることを言う.

定義 2.2.7(3) の論理式

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, a \leq b, \forall n \in \mathbb{N}, a \leq a_n \leq b.$$

定義 2.2.8. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

- (1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が上に有界のとき, $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup a(\mathbb{N})$ を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の上限と言う.
- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が下に有界のとき, $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf a(\mathbb{N})$ を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の下限と言う.

注意. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

- (1) (上限公理) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が上に有界ならば, $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ が存在する.
- (2) (下限公理) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が下に有界ならば, $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ が存在する.

命題 2.2.4. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

- (1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である.
- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束し, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ならば, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n| > \frac{1}{2} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.2.5 (和・スカラー倍の極限). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, $c \in \mathbb{R}$ とする.

- (1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ.

- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{ca_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.2.6 (積・商の極限). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

(1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ.

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束し, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ならば, $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.2.7 (極限の単調性). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とするとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$, かつ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.2.8 (はさみうちの原理). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とするとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$, かつ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ならば, $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

2.3 実数体の Cauchy 完備性

● 単調収束公理

定義 2.3.1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

(1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**単調増加**であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq a_{n+1}$ のことを言う.

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**単調減少**であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geq a_{n+1}$ のことを言う.

定義 2.3.2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

(1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**狭義単調増加**であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < a_{n+1}$ のことを言う.

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**狭義単調減少**であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > a_{n+1}$ のことを言う.

公理 2.3.1 (単調増加収束公理). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とするとき, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が単調増加かつ上に有界ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

が成り立つ.

公理 2.3.2 (単調減少収束公理). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とするとき, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が単調減少かつ下に有界ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

が成り立つ.

定理 2.3.1. 次の (i), (ii) は同値である.

(i) 単調増加収束公理.

(ii) 単調減少収束公理.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.3.2.

(1) 上限公理 $\Rightarrow$ 単調増加収束公理.

(2) 下限公理 $\Rightarrow$ 単調減少収束公理.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

によって定義すると, $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は収束する. これより, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ と書き, e を **Napier 数** (定義 1.1.1) と言う.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● Archimedes の公理

公理 2.3.3 (Archimedes の公理). 任意の $x, y > 0$ に対し,

$$nx > y$$

を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する.

定理 2.3.3. 次の (i), (ii) は同値である.

(i) Archimedes の公理.

(ii) $\mathbb{N}$ は上に有界でない.

定理 2.3.3(ii) の論理式

$$\forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > b.$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.3.4. 次の (i), (ii) は同値である.

(i) Archimedes の公理.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

証明. 省略 (演習問題). □

定理 2.3.5. 次の (i), (ii) は同値である.

(i) Archimedes の公理.

(ii) 任意の $0 < a < 1$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.3.6. 単調増加収束公理 $\Rightarrow$ Archimedes の公理.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 2.3.1.

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$n \leq x < n + 1$$

を満たす $n \in \mathbb{Z}$ が一意に存在する.

(2) $x < y$ を満たす任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$x < r < y$$

を満たす $r \in \mathbb{Q}$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

定義 2.3.3.

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$n \leq x < n + 1$$

を満たす $n \in \mathbb{Z}$ を $n = [x]$ と書き, $[x]$ を x の **Gauss 記号** と言う.

(2) $A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とする. A が $\mathbb{R}$ で**稠密**であるとは, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$$

となる A の点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在することを言う.

命題 2.3.2 (10 進展開). 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, 次の (i), (ii) を満たす整数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する.

(i) $x_0 \in \mathbb{Z}$, $x_n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n \leq 9$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$).

(ii) 数列 $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$r_n = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{10^k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義すると, $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ となる有理数列である.

特に, $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● Cantor の公理

定義 2.3.4. $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を集合列とする.

(1) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**単調増加**であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \subseteq A_{n+1}$ のことを言う.

(2) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が**単調減少**であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n \supseteq A_{n+1}$ のことを言う.

公理 2.3.4 (Cantor の公理). $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間列とすると, $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が単調減少ならば, 次の (i), (ii) を満たす $\alpha, \beta \in I_0$, $\alpha \leq \beta$ が存在する.

(i) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta].$

(ii) $I_n = [a_n, b_n]$ ($n \in \mathbb{N}$) とおくと, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta.$

定理 2.3.7. 単調増加収束公理, 単調減少収束公理 $\Rightarrow$ Cantor の公理.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 2.3.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ とし, $I = [a, b]$ とおく. $l(I) = b - a$ を I の**長さ**と言う.

命題 2.3.3 (区間縮小法). $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間列とすると, $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が単調減少であり, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} l(I_n) = 0$ ならば, 次の (i), (ii) を満たす $\alpha \in I_0$ が存在する.

(i) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}.$

(ii) $I_n = [a_n, b_n]$ ($n \in \mathbb{N}$) とおくと, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● Bolzano-Weierstrass の公理

定義 2.3.6. $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像, $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

- (1) n が**狭義単調増加**であるとは, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $n(k) < n(k+1)$ のことを言う.
- (2) n が狭義単調増加のとき, $a \circ n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (定義 0.2.13) を a の**部分列**と言う. このとき,

$$a \circ n(k) = a_{n(k)} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad a \circ n = \{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

と書き, $a_{n(k)}$ を $\{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ の**一般項**と言う.

命題 2.3.4. $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする.

- (1) n が狭義単調増加ならば, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $k \leq n(k)$.
- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の任意の部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

公理 2.3.5 (Bolzano-Weierstrass の公理). $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の収束する部分列が存在する.

定理 2.3.8. Archimedes の公理, Cantor の公理 $\Rightarrow$ Bolzano-Weierstrass の公理.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● Cauchy の公理

定義 2.3.7. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が **Cauchy 列** であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し, $m, n \geq N(\varepsilon)$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 2.3.7 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, (m, n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

命題 2.3.5. 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束すれば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意 (命題 2.3.5 の対偶). 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Cauchy 列でなければ, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束しない.

公理 2.3.6 (Cauchy の公理). 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Cauchy 列ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する.

命題 2.3.6. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を Cauchy 列とする.

(1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である.

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の収束する部分列が存在すれば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.3.9. Bolzano-Weierstrass の公理 $\Rightarrow$ Cauchy の公理.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 実数体の連続性 II

定理 2.3.10. Bolzano-Weierstrass の公理 $\Rightarrow$ Archimedes の公理.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.3.11. Archimedes の公理, Cauchy の公理 $\Rightarrow$ Dedekind の公理.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 2.3.12 (実数体の Cauchy 完備性). 次の (i)–(viii) は互いに同値である.

(i) Dedekind の公理.

(ii) 上限公理.

(iii) 下限公理.

(iv) 単調増加収束公理.

(v) 単調減少収束公理.

(vi) Archimedes の公理, Cantor の公理.

(vii) Bolzano-Weierstrass の公理.

(viii) Archimedes の公理, Cauchy の公理.

証明. 省略 (定理 2.1.1, 定理 2.3.1, 定理 2.3.2, 定理 2.3.6–定理 2.3.11). □

注意. 定理 2.3.12(i)–(viii) を総称して**連続の公理**と言う.

第3章 関数の極限と連続関数

3.1 関数の極限

• $x \rightarrow a$ での極限

定義 3.1.1. A を集合とする. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (定義 0.2.8) を A 上の関数と言う.

定義 3.1.2 (ε - δ 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ と書く.

定義 3.1.2 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in I, (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon).$$

定義 3.1.3 (M - δ 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が ∞ に発散するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $\delta(M) > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta(M)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) > M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ と書く.

定義 3.1.3 の論理式

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0, \forall x \in I, (0 < |x - a| < \delta(M) \Rightarrow f(x) > M).$$

定義 3.1.4 (M - δ 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が $-\infty$ に発散するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $\delta(M) > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta(M)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) < -M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ と書く.

定義 3.1.4 の論理式

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0, \forall x \in I, (0 < |x - a| < \delta(M) \Rightarrow f(x) < -M).$$

命題 3.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が収束すれば, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は一意である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$$

によって定義すると, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.1.5. A を集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とし, $f(A) = \{f(x); x \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ (定義 0.2.9) とおく.

(1) f が A で上に**有界**であるとは, $f(A)$ が上に有界であることを言う.

(2) f が A で下に**有界**であるとは, $f(A)$ が下に有界であることを言う.

(3) f が A で**有界**であるとは, $f(A)$ が有界であることを言う.

定義 3.1.5(3) の論理式

$$\exists c, d \in \mathbb{R}, c \leq d, \forall x \in A, c \leq f(x) \leq d.$$

定義 3.1.6. $A \neq \emptyset$ を集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする.

(1) f が A で上に有界のとき, $\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$ を f の A での**上限**と言う.

(2) f が A で下に有界のとき, $\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A)$ を f の A での**下限**と言う.

注意. $A \neq \emptyset$ を集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする.

(1) (上限公理) f が A で上に有界ならば, $\sup_{x \in A} f(x)$ が存在する.

(2) (下限公理) f が A で下に有界ならば, $\inf_{x \in A} f(x)$ が存在する.

命題 3.1.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき,

(1) $f(x)$ が収束すれば, ある $\delta > 0$ が存在し, f は $(a - \delta, a + \delta)$ で有界である.

(2) $f(x)$ が収束し, かつ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ ならば, ある $\delta > 0$ が存在し, 任意の $x \in (a - \delta, a + \delta)$ に対して

$$|f(x)| > \frac{1}{2} \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 3.1.3 (和・スカラー倍の極限). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x), g(x)$ が収束すれば, $f(x) + g(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

が成り立つ.

(2) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が収束すれば, $cf(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 3.1.4 (積・商の極限). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする.

(1) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x), g(x)$ が収束すれば, $f(x)g(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

が成り立つ.

(2) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x), g(x)$ が収束し, かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ならば, $\frac{f(x)}{g(x)}$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 3.1.5 (合成の極限). $I, J \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ $I \setminus \{a\}$, J 上の関数とするとき,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

となる $b \in J$ が存在し, かつ $y \rightarrow b$ のとき, $g(y)$ が収束すれば, $x \rightarrow a$ のとき, $g \circ f$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 3.1.6 (極限の単調性). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. 任意の $x \in I$, $x \neq a$ に対して $f(x) \leq g(x)$, かつ $x \rightarrow a$ のとき, $f(x), g(x)$ が収束すれば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 3.1.7 (はさみうちの原理). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f, g, h : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. 任意の $x \in I$, $x \neq a$ に対して $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, かつ $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$, $g(x)$ が収束して $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ならば, $x \rightarrow a$ のとき, $h(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 3.1.8. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数, $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \neq a$, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となる I の任意の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$$

となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

定理 3.1.1 (Cauchy の収束判定法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ は収束する.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $0 < |x - a|, |y - a| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x, y \in I$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

• $x \rightarrow a \pm 0$ での極限

定義 3.1.7 (ε - δ 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする.

- (1) $x \rightarrow a + 0$ のとき, $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に**収束**するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $a < x < a + \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$ と書く.

- (2) $x \rightarrow a - 0$ のとき, $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に**収束**するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $a - \delta(\varepsilon) < x < a$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha$ と書く.

定義 3.1.7(1) の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in I, (a < x < a + \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon).$$

命題 3.1.9. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ は収束する.

- (ii) $x \rightarrow a \pm 0$ のとき, $f(x)$ は収束し, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.1.8 (M - δ 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする.

- (1) $x \rightarrow a + 0$ のとき, $f(x)$ が ∞ に**発散**するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $\delta(M) > 0$ が存在し, $a < x < a + \delta(M)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) > M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ と書く.

- (2) $x \rightarrow a - 0$ のとき, $f(x)$ が ∞ に**発散**するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $\delta(M) > 0$ が存在し, $a - \delta(M) < x < a$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) > M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ と書く.

定義 3.1.8(1) の論理式

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0, \forall x \in I, (a < x < a + \delta(M) \Rightarrow f(x) > M).$$

例. $(0, \infty)$ 上の関数 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

によって定義すると, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.1.9 (M - δ 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする.

- (1) $x \rightarrow a+0$ のとき, $f(x)$ が $-\infty$ に**発散**するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $\delta(M) > 0$ が存在し, $a < x < a + \delta(M)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) < -M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$ と書く.

- (2) $x \rightarrow a-0$ のとき, $f(x)$ が $-\infty$ に**発散**するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $\delta(M) > 0$ が存在し, $a - \delta(M) < x < a$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) < -M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ と書く.

定義 3.1.9(1) の論理式

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0, \forall x \in I, (a < x < a + \delta(M) \Rightarrow f(x) < -M).$$

注意. $x \rightarrow a \pm 0$ での極限に対しても, $x \rightarrow a$ での極限と同様の命題が成り立つ.

• $x \rightarrow \pm\infty$ での極限

定義 3.1.10 (ε - N 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

- (1) ($a \in \mathbb{R}, I = (a, \infty)$) $x \rightarrow \infty$ のとき, $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に**収束**するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) > a$ が存在し, $x > N(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ と書く.

- (2) ($b \in \mathbb{R}, I = (-\infty, b)$) $x \rightarrow -\infty$ のとき, $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に**収束**するとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) > -b$ が存在し, $x < -N(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$ と書く.

定義 3.1.10(1) の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > a, \forall x \in (a, \infty), (x > N(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon).$$

例. $(0, \infty)$ 上の関数 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

によって定義すると, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ となる.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 3.1.11 (M - N 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

- (1) ($a \in \mathbb{R}, I = (a, \infty)$) $x \rightarrow \infty$ のとき, $f(x)$ が ∞ に**発散**するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $N(M) > a$ が存在し, $x > N(M)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) > M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ と書く.

- (2) ($b \in \mathbb{R}, I = (-\infty, b)$) $x \rightarrow -\infty$ のとき, $f(x)$ が ∞ に**発散**するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $N(M) > -b$ が存在し, $x < -N(M)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) > M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ と書く.

定義 3.1.11(1) の論理式

$$\forall M > 0, \exists N(M) > a, \forall x \in (a, \infty), (x > N(M) \Rightarrow f(x) > M).$$

定義 3.1.12 (M - N 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

- (1) ($a \in \mathbb{R}, I = (a, \infty)$) $x \rightarrow \infty$ のとき, $f(x)$ が $-\infty$ に**発散**するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $N(M) > a$ が存在し, $x > N(M)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) < -M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ と書く.

- (2) ($b \in \mathbb{R}, I = (-\infty, b)$) $x \rightarrow -\infty$ のとき, $f(x)$ が $-\infty$ に**発散**するとは, 任意の $M > 0$ に対してある $N(M) > -b$ が存在し, $x < -N(M)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) < -M$$

が成り立つことを言う. このとき, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ と書く.

定義 3.1.12(1) の論理式

$$\forall M > 0, \exists N(M) > a, \forall x \in (a, \infty), (x > N(M) \Rightarrow f(x) < -M).$$

注意. $x \rightarrow \pm\infty$ での極限に対しても, $x \rightarrow a$ での極限と同様の命題が成り立つ.

3.2 連続関数, 一様連続関数, 半連続関数

● 連続関数

定義 3.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

(1) f が $a \in I$ で連続であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

となることを言う.

(2) f が I で連続であるとは, f が任意の $a \in I$ で連続であることを言う.

定義 3.2.1(2) の論理式

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(a, \varepsilon) > 0, \forall x \in I, (|x - a| < \delta(a, \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

命題 3.2.1 (和・スカラー倍の連続性). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) f, g が a で連続ならば, $f + g$ は a で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a)$$

が成り立つ.

(2) f が a で連続ならば, cf は a で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cf(a)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 3.1.3). □

命題 3.2.2 (積・商の連続性). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

(1) f, g が a で連続ならば, fg は a で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = f(a)g(a)$$

が成り立つ.

(2) f, g が a で連続であり, かつ $g(a) \neq 0$ ならば, $\frac{f}{g}$ は a で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 3.1.4). □

例. $(0, \infty)$ 上の関数 $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

によって定義すると, f は $(0, \infty)$ で連続である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 3.2.3 (合成の連続性). $I, J \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ I , J 上の関数とすると, f , g がそれぞれ a , $f(a)$ で連続ならば, $g \circ f$ は a で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(f(a))$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 3.1.5). □

命題 3.2.4. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は a で連続である.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となる I の任意の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

となる.

証明. 省略 (命題 3.1.8). □

● 一様連続関数

定義 3.2.2 (ε - δ 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする. f が I で一様連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x, y \in I$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

定義 3.2.2 の論理式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, y \in I, (|x - y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

命題 3.2.5. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とすると, f が I で一様連続ならば, f は I で連続である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $\mathbb{R}$ 上の関数 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$g(x) = \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義すると, f, g は $\mathbb{R}$ で一様連続である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 3.2.1 (Heine-Cantor の定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とすると, f が $[a, b]$ で連続ならば, f は $[a, b]$ で一様連続である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

例. $(0, \infty)$ 上の関数 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

によって定義すると, f は $(0, \infty)$ で連続であるが, 一様連続でない.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 半連続関数

定義 3.2.3 (ε - δ 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

- (1) f が $a \in I$ で **上半連続** であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) - f(a) < \varepsilon$$

が成り立つことを言う.

- (2) f が I で **上半連続** であるとは, f が任意の $a \in I$ で上半連続であることを言う.

定義 3.2.3(2) の論理式

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(a, \varepsilon) > 0, \forall x \in I, (|x - a| < \delta(a, \varepsilon) \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon).$$

定義 3.2.4 (ε - δ 論法). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

- (1) f が $a \in I$ で **下半連続** であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) - f(a) > -\varepsilon$$

が成り立つことを言う.

- (2) f が I で **下半連続** であるとは, f が任意の $a \in I$ で下半連続であることを言う.

定義 3.2.4(2) の論理式

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(a, \varepsilon) > 0, \forall x \in I, (|x - a| < \delta(a, \varepsilon) \Rightarrow f(x) - f(a) > -\varepsilon).$$

命題 3.2.6. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) f は a で連続である.
(ii) f は a で上半連続かつ下半連続である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

例. $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

によって定義すると, f は 0 で上半連続であるが, 下半連続でない.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

3.3 中間値の定理, 逆関数の定理, 最大値の定理

● 中間値の定理

補題 3.3.1 (Bolzano の定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とすると, f が $[a, b]$ で連続であり, かつ $f(a) < 0 < f(b)$ または $f(a) > 0 > f(b)$ ならば,

$$f(x_0) = 0$$

を満たす $a < x_0 < b$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 3.3.1 (中間値の定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とし, $c = \min\{f(a), f(b)\}$, $d = \max\{f(a), f(b)\}$ とおくと, f が $[a, b]$ で連続ならば, 任意の $c \leq y_0 \leq d$ に対し,

$$f(x_0) = y_0$$

を満たす $a \leq x_0 \leq b$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 3.3.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間 (定義 0.3.2), $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とし, $f(I) = \{f(x) ; x \in I\} \subseteq \mathbb{R}$ (定義 0.2.9) とおくと, f が I で連続ならば, $f(I)$ は $\mathbb{R}$ の区間である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 逆関数の定理

定義 3.3.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

- (1) f が I で **単調増加** であるとは, 任意の $x, x' \in I$, $x \leq x'$ に対して $f(x) \leq f(x')$ のことを言う.
- (2) f が I で **単調減少** であるとは, 任意の $x, x' \in I$, $x \leq x'$ に対して $f(x) \geq f(x')$ のことを言う.
- (3) f が I で **単調** であるとは, f が I で単調増加または I で単調減少であることを言う.

定義 3.3.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

- (1) f が I で **狭義単調増加** であるとは, 任意の $x, x' \in I$, $x < x'$ に対して $f(x) < f(x')$ のことを言う.
- (2) f が I で **狭義単調減少** であるとは, 任意の $x, x' \in I$, $x < x'$ に対して $f(x) > f(x')$ のことを言う.
- (3) f が I で **狭義単調** であるとは, f が I で狭義単調増加または I で狭義単調減少であることを言う.

命題 3.3.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

- (1) f が I で狭義単調ならば, f は I から $\mathbb{R}$ への単射 (定義 0.2.11) である.
- (2) f が I から $\mathbb{R}$ への単射かつ I で連続ならば, f は I で狭義単調である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

定理 3.3.2 (逆関数の定理). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とし, $f(I) = \{f(x); x \in I\} \subseteq \mathbb{R}$ (定義 0.2.9) とおく.

- (1) f が I で狭義単調増加かつ連続ならば, $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ は $f(I)$ で狭義単調増加かつ連続である.
- (2) f が I で狭義単調減少かつ連続ならば, $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ は $f(I)$ で狭義単調減少かつ連続である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 最大値の定理

定義 3.3.3. $A \neq \emptyset$ を集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とし, $f(A) = \{f(x); x \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ (定義 0.2.9) とおく.

- (1) $\max f(A)$ が存在するとき, $\max_{x \in A} f(x) = \max f(A)$ を f の A での**最大値**と言う.
(2) $\min f(A)$ が存在するとき, $\min_{x \in A} f(x) = \min f(A)$ を f の A での**最小値**と言う.

定義 3.3.4. A を集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を A 上の関数とする.

- (1) f が $x_0 \in A$ で**最大**であるとは,

$$f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$$

が成り立つことを言う.

- (2) f が $x_0 \in A$ で**最小**であるとは,

$$f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$$

が成り立つことを言う.

補題 3.3.2 (有界性の定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とする.

- (1) f が $[a, b]$ で上半連続ならば, f は $[a, b]$ で上に有界である.
(2) f が $[a, b]$ で下半連続ならば, f は $[a, b]$ で下に有界である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 3.3.3 (最大値の定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とする.

- (1) f が $[a, b]$ で上半連続ならば, f の $[a, b]$ での最大値が存在する.
(2) f が $[a, b]$ で下半連続ならば, f の $[a, b]$ での最小値が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 3.3.4. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とすると, f が $[a, b]$ で連続ならば, f の $[a, b]$ での最大値・最小値が存在し,

$$c = \min_{a \leq x \leq b} f(x), \quad d = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

とおくと, $f([a, b]) = [c, d]$ (定義 0.2.9) が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第4章 導関数と平均値の定理

4.1 導関数と接線

● 導関数

定義 4.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

(1) f が $a \in I$ で微分可能であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha$$

となる $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在することを言う. このとき, $\alpha = f'(a)$ と書き, $f'(a)$ を f の a での微分係数と言う.

(2) f が I で微分可能であるとは, f が任意の $a \in I$ で微分可能であることを言う. このとき, $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ を f の導関数と言う.

注意. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

(1) a が I の左端点ならば, $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ を f の a での (右) 微分係数とする.

(2) a が I の右端点ならば, $\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ を f の a での (左) 微分係数とする.

命題 4.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とすると, f が a で微分可能ならば, f は a で連続である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.1.2 (和・スカラー倍の微分可能性). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) f, g が a で微分可能ならば, $f + g$ は a で微分可能であり,

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

が成り立つ.

(2) f が a で微分可能ならば, cf は a で微分可能であり,

$$(cf)'(a) = cf'(a)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 4.1.3 (積・商の微分可能性). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

(1) f, g が a で微分可能ならば, fg は a で微分可能であり,

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

が成り立つ.

(2) f, g が a で微分可能であり, かつ $g(a) \neq 0$ ならば, $\frac{f}{g}$ は a で微分可能であり,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 4.1.4 (合成の微分可能性). $I, J \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ I, J 上の関数とすると, f, g がそれぞれ $a, f(a)$ で微分可能ならば, $g \circ f$ は a で微分可能であり,

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

命題 4.1.5 (逆の微分可能性). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の狭義単調連続関数とするとき, f が a で微分可能であり, かつ $f'(a) \neq 0$ ならば, f^{-1} は $f(a)$ で微分可能であり,

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

• Landau の記号

定義 4.1.2 (Landau の記号). $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ とする.

(1) $I_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} ; 0 < |x - a| < \delta\}$ を a の**除外近傍**という.

(2) $f, g : I_\delta(a) \rightarrow \mathbb{R}$ を $I_\delta(a)$ 上の関数とする. $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow a$) であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

となることを言う. このとき, $f(x) < g(x)$ ($x \rightarrow a$) と書く.

例. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha > \beta$ ならば, $x^\alpha = o(x^\beta)$ ($x \rightarrow +0$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート).

□

● 接線

定義 4.1.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in I, y = f(x)\}$$

を f のグラフと言う.

命題 4.1.6. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とすると, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) f は a で微分可能である.

(ii) $f(x) - f(a) = \alpha(x - a) + o(x - a)$ ($x \rightarrow a$) を満たす $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在する.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば, $f'(a) = \alpha$ が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 4.1.4. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の a で微分可能な関数とする.

$$T_a(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y - f(a) = f'(a)(x - a)\}$$

を $G(f)$ の $(a, f(a))$ での接線と言う.

4.2 平均値の定理

補題 4.2.1 (Rolle の定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能な関数とすると、 $f(a) = f(b)$ ならば、

$$f'(x_0) = 0$$

を満たす $a < x_0 < b$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.2.1 (平均値の定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能な関数とすると、

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たす $a < x_0 < b$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.2.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能な関数とする.

(1) f は $[a, b]$ で単調増加 $\Leftrightarrow f' \geq 0$. つまり, $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) \geq 0$.

(2) f は $[a, b]$ で単調減少 $\Leftrightarrow f' \leq 0$. つまり, $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) \leq 0$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 4.2.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能な関数とする.

(1) f は $[a, b]$ で狭義単調増加 $\Leftrightarrow f' > 0$. つまり, $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) > 0$.

(2) f は $[a, b]$ で狭義単調減少 $\Leftrightarrow f' < 0$. つまり, $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) < 0$.

証明. 省略 (命題 4.2.1). □

補題 4.2.2. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能な関数とすると、 $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) \neq 0$ ならば、 $f(a) \neq f(b)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 4.2.2 (Cauchy の平均値の定理). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能な関数とすると、 $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$ ならば、

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

を満たす $a < x_0 < b$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

4.3 de l'Hôpital の法則

• $\frac{0}{0}$ の不定形

命題 4.3.1 (de l'Hôpital の法則). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を (a, b) 上の微分可能関数で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\forall x \in (a, b)$, $g(x) \neq 0$, かつ $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$.

(ii) $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$, かつ $x \rightarrow a+0$ のとき, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ は収束する.

$x \rightarrow a+0$ のとき, $\frac{f(x)}{g(x)}$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. $a = -\infty$ のときも, 命題 4.3.1 が成り立つ.

命題 4.3.2 (de l'Hôpital の法則). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を (a, b) 上の微分可能関数で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\forall x \in (a, b)$, $g(x) \neq 0$, かつ $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$.

(ii) $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$, かつ $x \rightarrow b-0$ のとき, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ は収束する.

$x \rightarrow b-0$ のとき, $\frac{f(x)}{g(x)}$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 4.3.1). □

注意. $b = \infty$ のときも, 命題 4.3.2 が成り立つ.

例. $a, b > 0$ とすると, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log \frac{a}{b}$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

• $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形

命題 4.3.3 (de l'Hôpital の法則). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を (a, b) 上の微分可能関数で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \pm\infty$ (複号任意).

(ii) $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$, かつ $x \rightarrow a+0$ のとき, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ は収束する.

$x \rightarrow a+0$ のとき, $\frac{f(x)}{g(x)}$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

注意. $a = -\infty$ のときも, 命題 4.3.3 が成り立つ.

命題 4.3.4 (de l'Hôpital の法則). $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を (a, b) 上の微分可能関数で, 次の (i), (ii) を満たすものとする.

(i) $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = \pm\infty$ (複号任意).

(ii) $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$, かつ $x \rightarrow b-0$ のとき, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ は収束する.

$x \rightarrow b-0$ のとき, $\frac{f(x)}{g(x)}$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ.

証明. 省略 (命題 4.3.3). □

注意. $b = \infty$ のときも, 命題 4.3.4 が成り立つ.

例. $\alpha > 0$ とすると, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

第5章 高階導関数とTaylorの定理

5.1 高階導関数と関数の極大・極小

• n 階導関数

定義 5.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対し, 次の (i), (ii) によって帰納的に定義される $f^{(n)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ を f の n 階導関数と言う.

(i) $f^{(0)} = f$.

(ii) $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $(f^{(k)}: I \rightarrow \mathbb{R})$ が I で微分可能ならば, $f^{(k+1)}$ を

$$f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$$

によって定義する).

例. $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を

$$f(x) = x^\alpha \quad (x > 0)$$

によって定義すると, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $x > 0$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.1.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

(1) f が I で n 回連続微分可能または C^n 級 ($n \in \mathbb{N}$) であるとは, 任意の $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ に対して $f^{(k)}$ が定義され, $f^{(n)}$ が I で連続であることを言う.

(2) f が I で無限回微分可能または C^∞ 級であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して f が I で C^n 級であることを言う.

定義 5.1.3. 任意の $n, k \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & (k=0), \\ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} & (k \geq 1) \end{cases}$$

を二項係数と言う.

命題 5.1.1 (Leibniz の法則). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $n \in \mathbb{N}$, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^n 級関数とすると,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad (x \in I)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 関数の極大・極小

定義 5.1.4. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の開区間 (定理 0.3.1(i), (iv), (vi)), $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

- (1) f が $a \in I$ で**極大**であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) \leq f(a)$$

が成り立つことを言う.

- (2) f が $a \in I$ で**極小**であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) \geq f(a)$$

が成り立つことを言う.

定義 5.1.5. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の開区間 (定理 0.3.1(i), (iv), (vi)), $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

- (1) f が $a \in I$ で**狭義極大**であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) < f(a)$$

が成り立つことを言う.

- (2) f が $a \in I$ で**狭義極小**であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $0 < |x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) > f(a)$$

が成り立つことを言う.

命題 5.1.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の開区間 (定理 0.3.1(i), (iv), (vi)), $a \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の微分可能関数とすると, f が a で極大または極小ならば, $f'(a) = 0$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.1.6. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の開区間 (定理 0.3.1(i), (iv), (vi)), $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の微分可能関数とする. $f'(a) = 0$ を満たす $a \in I$ を f の**停留点**と言う.

命題 5.1.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の開区間 (定理 0.3.1(i), (iv), (vi)), $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^2 級関数, $a \in I$ を f の停留点とする.

- (1) $f''(a) > 0$ ならば, f は a で狭義極小である.

- (2) $f''(a) < 0$ ならば, f は a で狭義極大である.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

5.2 Taylor の定理

定理 5.2.1 (Taylor の定理). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^{n+1} 級関数とすると, 任意の $x \in I$ に対し,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}((1-\theta(x))a + \theta(x)x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

を満たす $0 < \theta(x) < 1$ が存在する. さらに, $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}((1-\theta(x))a + \theta(x)x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ とおくと, $R_n(x) = o((x-a)^n) \ (x \rightarrow a)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.2.2 (Taylor の定理). $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^{n+1} 級関数とすると,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du \quad (x \in I)$$

が成り立つ. さらに, $R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du$ とおくと, $R_n(x) = o((x-a)^n) \ (x \rightarrow a)$.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定理 5.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^{n+1} 級関数とすると,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a)$$

を満たす $a_k \in \mathbb{R} \ (k \in \{0, 1, \dots, n\})$ が存在すれば,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k \in \{0, 1, \dots, n\})$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^{n+1} 級関数とする.

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

を f の a を中心とする n 次 Taylor 多項式と言う.

5.3 初等関数の Taylor 多項式

• Landau の記号

定義 5.3.1 (Landau の記号). $a \in \mathbb{R}$ とする.

(1) (a, ∞) を ∞ の除外近傍という.

(2) $f, g : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を (a, ∞) 上の関数とする. $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow \infty$) であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

となることを言う. このとき, $f(x) < g(x)$ ($x \rightarrow \infty$) と書く.

例. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha < \beta$ ならば, $x^\alpha = o(x^\beta)$ ($x \rightarrow \infty$).

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.3.2 (Landau の記号). $b \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $(-\infty, b)$ を $-\infty$ の除外近傍という.

(2) $f, g : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を $(-\infty, b)$ 上の関数とする. $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow -\infty$) であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

となることを言う. このとき, $f(x) < g(x)$ ($x \rightarrow -\infty$) と書く.

● 幾何級数, 指数関数, 対数関数, 冪関数

命題 5.3.1. $n \in \mathbb{N}$ とすると,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.2. $n \in \mathbb{N}$ とすると, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta(x)x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

を満たす $0 < \theta(x) < 1$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.3. $n \in \mathbb{N}$ とすると,

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{u^n}{1+u} du \quad (-1 < x \leq 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

定義 5.3.3. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1) \end{cases}$$

を二項係数と言う.

命題 5.3.4. $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ とすると, 任意の $-1 < x < 1$ に対し,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} (1+\theta(x)x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

を満たす $0 < \theta(x) < 1$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.5. $\alpha, \beta > 0$ とするとき, $\alpha < \beta$ ならば,

$$\log x < x^\alpha < x^\beta < e^x \quad (x \rightarrow \infty).$$

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

● 三角関数, 逆三角関数

命題 5.3.6. $n \in \mathbb{N}$ とすると, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{\cos(\theta(x)x)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

を満たす $0 < \theta(x) < 1$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.7. $n \in \mathbb{N}$ とすると, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + (-1)^{n+1} \frac{\cos(\theta(x)x)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$$

を満たす $0 < \theta(x) < 1$ が存在する.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

命題 5.3.8. $n \in \mathbb{N}$ とすると,

$$\arctan x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{u^{2n+2}}{1+u^2} du \quad (-1 < x \leq 1)$$

が成り立つ.

証明. 省略 (講義の自筆ノート). □

関連図書

- [1] 齋藤 正彦, 微分積分学, 東京図書, 2006 年.
- [2] 杉浦 光夫, 解析入門 I(基礎数学), 東京大学出版会, 1980 年.
- [3] 難波 誠, 微分積分学 (数学シリーズ), 裳華房, 1996 年.