

微分積分学I 演習問題

柿澤 亮平

島根大学学術研究院 教育学系 数学科教育専攻

目次

第 1 章	初等関数の微積分法	1
1.1	指数関数, 対数関数, 冪関数	1
1.2	三角関数, 逆三角関数	5
1.3	有理関数	9
第 2 章	数列の極限と実数体の連続性	13
2.1	実数体の順序完備性	13
2.2	数列の極限	16
2.3	実数体の Cauchy 完備性	20
第 3 章	関数の極限と連続関数	28
3.1	関数の極限	28
3.2	連続関数, 一様連続関数, 半連続関数	32
3.3	中間値の定理, 逆関数の定理, 最大値の定理	35
第 4 章	導関数と平均値の定理	38
4.1	導関数と接線	38
4.2	平均値の定理	41
4.3	de l'Hôpital の法則	43
第 5 章	高階導関数と Taylor の定理	45
5.1	高階導関数と関数の極大・極小	45
5.2	Taylor の定理	48
5.3	初等関数の Taylor 多項式	50

第1章 初等関数の微積分法

1.1 指数関数, 対数関数, 冪関数

● 指数関数

[1] 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

[2] $x > 0$ とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

が成り立つ.

(2) $m \leq n$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$ に対して

$$1 + x + \sum_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{x^k}{k!} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

が成り立つ.

[3] $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ が

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) & (x, y \in \mathbb{R}), \\ f(1) = e \end{cases}$$

を満たすとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $r \in \mathbb{Q}$ に対して

$$f(r) = e^r$$

が成り立つ.

(2) 任意の $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対し, $\{r_n\}$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ となる有理数列とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = e^x$$

が成り立つ.

- 4 次の数列 $\{a_n\}$ の近似値を求めるプログラムを考える.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

プログラム (BASIC)

```
INPUT n
PRINT (1+1/n)^n
END
```

このとき, プログラムに次の (1)–(3) を入力して次の極限値を推測せよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

(1) $n = 1000000$.

(2) $n = 1500000$.

(3) $n = 2000000$.

- 5 次の数列 $\{s_n\}$ の近似値を求めるプログラムを考える.

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

プログラム (BASIC)

```
INPUT n
LET s=1
FOR k=1 TO n
  LET a=1
  FOR b=1 TO k
    LET a=a/b
  NEXT b
  LET s=s+a
NEXT k
PRINT s
END
```

このとき, プログラムに次の (1)–(3) を入力して次の極限値を推測せよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

(1) $n = 10$.

(2) $n = 15$.

(3) $n = 20$.

- 6 次の数列 $\{a_n\}$ の近似値を求めるプログラムを考える.

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

プログラム (BASIC)

```
INPUT n
PRINT (1-1/n)^n
END
```

このとき, プログラムに次の (1)–(3) を入力して次の極限值を推測せよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

- (1) $n = 1000000$.
- (2) $n = 1500000$.
- (3) $n = 2000000$.

- 7 次の数列 $\{s_n\}$ の近似値を求めるプログラムを考える.

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

プログラム (BASIC)

```
INPUT n
LET s=1
FOR k=1 TO n
  LET a=1
  FOR b=1 TO k
    LET a=-a/b
  NEXT b
  LET s=s+a
NEXT k
PRINT s
END
```

このとき, プログラムに次の (1)–(3) を入力して次の極限值を推測せよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

- (1) $n = 10$.
- (2) $n = 15$.
- (3) $n = 20$.

● 指数関数, 対数関数, 冪関数の微積分法

8 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $x \geq 1$ に対し,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

を満たす $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ が存在する.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

9 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を微分可能関数とすると,

$$\int f(x)e^x dx = f(x)e^x - \int f'(x)e^x dx$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) $n \in \mathbb{N}$ とするとき, 次の関数

$$f_n(x) = x^n e^x$$

の原始関数 $F_n(x)$ を求めよ.

10 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を微分可能関数とすると,

$$\int f(\log x) dx = x f(\log x) - \int f'(\log x) dx$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) $n \in \mathbb{N}$ とするとき, 次の関数

$$f_n(x) = (\log x)^n$$

の原始関数 $F_n(x)$ を求めよ.

1.2 三角関数, 逆三角関数

● 弧度法, 三角比

□ 1 次のことを証明せよ.

(1) (Archimedes の不等式) 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ に対して

$$n \sin \frac{\pi}{n} < \pi < n \tan \frac{\pi}{n}$$

が成り立つ.

(2) (Archimedes 数) $\pi = 3.14 \dots$. 必要ならば, (1) に計算機を援用してもよい.

【ヒント】(1) に $n = 3 \cdot 2^5$ を代入する.

□ 2 $AB = AC$, $\angle A = \frac{\pi}{5}$ を満たす $\triangle ABC$ を考える. $\angle B$ の二等分線と辺 AC の交点を P とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\frac{AC}{AP}$ の値を求めよ.

(2) $\cos \frac{\pi}{5}$, $\sin \frac{\pi}{5}$ の値を求めよ.

● 三角関数

[3] 次の等式を証明せよ.

$$(1) \begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \ (x \in \mathbb{R}), \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \ (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

$$(2) \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \left(x \in \mathbb{R}, x \notin \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{4} \right) \pi \right).$$

[4] 次の等式を証明せよ.

$$(1) \begin{cases} \cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x \ (x \in \mathbb{R}), \\ \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \ (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

$$(2) \tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} \left(x \in \mathbb{R}, x \notin \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{6} \right) \pi \right).$$

[5] 次の等式を証明せよ.

$$(1) \begin{cases} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \ (x \in \mathbb{R}), \\ \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \ (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

$$(2) \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \ (x \in \mathbb{R}, x \notin (2\mathbb{Z} + 1)\pi).$$

[6] 次の問いに答えよ.

$$(1) \sin \frac{2}{5}\pi = \sin \frac{3}{5}\pi \text{ を証明せよ.}$$

$$(2) \cos \frac{\pi}{5}, \sin \frac{\pi}{5} \text{ の値を求めよ.}$$

● 逆三角関数

7 次の表を完成させよ.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$									
$\arccos x$									

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$							

8 次の等式を証明せよ.

$$(1) \arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$(2) \arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

9 次の等式を証明せよ.

$$(1) \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$(2) \arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

10 次の等式を証明せよ.

$$(1) \arctan x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$(2) \arccos x = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (0 < x \leq 1).$$

11 $-1 \leq x, y \leq 1$ とするとき, $x^2 + y^2 \leq 1$ ならば,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを証明せよ.

12 (指定演習問題 1) $-1 \leq x, y \leq 1$ とするとき, $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$ ならば,

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

が成り立つことを証明せよ.

● 三角関数, 逆三角関数の微積分法

- 13 $a, b \in \mathbb{R}$ とするとき, 次の関数

$$f(x) = e^{ax} \cos bx, \quad g(x) = e^{ax} \sin bx$$

の原始関数 $F(x), G(x)$ をそれぞれ求めよ.

- 14 次の原始関数列

$$F_n(x) = \int \cos^n x dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

の漸化式を導け.

- 15 次の原始関数列

$$F_n(x) = \int \sin^n x dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

の漸化式を導け.

- 16 次の原始関数列

$$F_n(x) = \int \tan^n x dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

の漸化式を導け.

- 17 次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = \arcsin \frac{1-x}{1+x}.$

(2) $f(x) = \arctan \sqrt{x^2 + 2x}.$

- 18 次の関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = \frac{x}{x^4 + 1}.$

(2) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$

- 19 次の原始関数列

$$F_n(x) = \int \arcsin^n x dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

の漸化式を導け.

- 20 $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ とするとき, 次の原始関数列

$$F_n(x) = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

の漸化式は

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} & (n = 1), \\ \frac{1}{2(n-1)a^2} \left\{ \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)F_{n-1}(x) \right\} & (n \geq 2) \end{cases}$$

であることを証明せよ.

1.3 有理関数

• 有理関数の積分法 I

□1 次の関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

$$(1) f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b^2 - 4ac \neq 0).$$

$$(2) f(x) = \frac{x}{ax^2 + bx + c} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b^2 - 4ac \neq 0).$$

□2 次の関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

$$(1) f(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}.$$

$$(2) f(x) = \frac{x+2}{(x-2)(x+1)^2}.$$

□3 次の関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

$$(1) f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}.$$

$$(2) f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)}.$$

□4 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{ax+b}{x^2-x+1} + \frac{c}{x+1}$$

を満たす $a, b, c \in \mathbb{R}$ を求めよ.

(2) 次の関数

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1}$$

の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

□5 $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ とするとき, 次の原始関数列

$$F_n(x) = \int \frac{1}{(x^3+a^3)^n} dx \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

の漸化式は

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{3a^2} \left\{ \log \frac{x+a}{\sqrt{x^2-ax+a^2}} + \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2x-a}{\sqrt{3}a} \right) \right\} & (n=1), \\ \frac{1}{3(n-1)a^3} \left\{ \frac{x}{(x^3+a^3)^{n-1}} + (3n-4)F_{n-1}(x) \right\} & (n \geq 2) \end{cases}$$

であることを証明せよ.

【ヒント】 $x = au$ と置換する.

□6 次の関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = \frac{x}{x^6 + 1}.$

(2) $f(x) = \frac{1}{1 - x^6}.$

□7 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{ax + b}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

を満たす $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ を求めよ.

(2) 次の関数

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$$

の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

● 有理関数の積分法 II

[8] 次の原始関数列

$$F_n(x) = \int \frac{1}{\cos^n x} dx \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

の漸化式を導け.

[9] 次の原始関数列

$$F_n(x) = \int \frac{1}{\sin^n x} dx \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

の漸化式を導け.

[10] 次の関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

$$(1) f(x) = \frac{1}{\cos^3 x}.$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{\sin^3 x}.$$

[11] $a, b \in \mathbb{R}$, $|b| < |a|$ とするとき, 次の関数

$$f(x) = \frac{1}{a + b \cos x}$$

の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

[12] $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \pm 1$ とするとき, 次の関数

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2a \cos x + a^2}$$

の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

[13] 次の関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

$$(1) f(x) = \frac{1}{\cos^4 x}.$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{\sin^4 x}.$$

[14] $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$ とするとき, 次の関数

$$f(x) = \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

[15] $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$ とするとき, 次の関数

$$f(x) = \frac{\cos x}{a \cos x + b \sin x}$$

の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

● 有理関数の積分法 III

16 $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ とするとき, 次の関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$$

の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

【ヒント】 $t^2 = \frac{x-a}{x-b}$ と置換する.

17 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, 次の関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

【ヒント】 $t^2 = \frac{x-a}{b-x}$ と置換する.

18 $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ とするとき, 次の関数

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$$

の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

【ヒント】 $t^2 = x-b$ と置換する.

19 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, 次の関数

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

の原始関数 $F(x)$ を求めよ.

【ヒント】 $t^2 = \frac{x-a}{b-x}$ と置換する.

20 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ とするとき,

$$\int \frac{1}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = - \int \frac{1}{\sqrt{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}} dt$$

を満たす $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ を求めよ.

【ヒント】 $\frac{1}{t} = px+q$ と置換する.

第2章 数列の極限と実数体の連続性

2.1 実数体の順序完備性

• Dedekind の公理

[1] (指定演習問題 2) $\mathbb{Q}$ の任意の切断 (A, B) は次の (i)–(iii) のいずれか一つだけを満たすことを証明せよ.

- (i) $\max A$ は存在せず, $\min B$ が存在する.
- (ii) $\max A$ が存在し, $\min B$ は存在しない.
- (iii) $\max A, \min B$ は存在しない.

[2] $a > 1, \forall r \in \mathbb{Q}, a \neq r^2$ とするとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0, x^2 > a\}, A = \mathbb{Q} \setminus B$ とおくと, (A, B) は $\mathbb{Q}$ の切断である.
- (2) $\max A, \min B$ は存在しない.

● 上限公理, 下限公理

[3] 次の $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ の上限, 下限をそれぞれ求めよ.

(1) $A = (a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$).

(2) $A = [a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$).

[4] 次の $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ の上限, 下限をそれぞれ求めよ.

(1) $A = (a, \infty)$ ($a \in \mathbb{R}$).

(2) $A = (-\infty, b)$ ($b \in \mathbb{R}$).

[5] $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とする.

$$A + B = \{a + b ; a \in A, b \in B\}$$

とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) A, B が上に有界ならば, $A + B$ は上に有界であり,

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

が成り立つ.

(2) A, B が下に有界ならば, $A + B$ は下に有界であり,

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

が成り立つ.

[6] $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) A, B が上に有界ならば, $A \cup B$ は上に有界であり,

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

が成り立つ.

(2) A, B が下に有界ならば, $A \cup B$ は下に有界であり,

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

が成り立つ.

[7] (Schnirelmann 密度) $A \subseteq \mathbb{N}$ を $\mathbb{N}$ の部分集合とする.

$$d(A) = \left\{ \frac{\sharp(A \cap \{0, 1, \dots, n-1\})}{n} ; n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

とおくとき, 次のことを証明せよ. ただし, $\sharp(*)$ は $*$ の元の個数を表す.

(1) $\inf d(A)$ が存在し, $\delta(A) = \inf d(A)$ とおくと, $0 \leq \delta(A) \leq 1$.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ に対し, $n-1 \notin A$ ならば, $0 \leq \delta(A) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

● 実数体の連続性 I

8 $a > 1$ とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) $A = \{x \in \mathbb{R} ; x > 0, x^2 < a\}$ とおくと, A は上に有界である.

(2) $\sup A$ が存在し, $\sup A > 0$, $(\sup A)^2 = a$ を満たす.

9 $a > 1$, $\forall r \in \mathbb{Q}, a \neq r^2$ とするとき, 次のことを証明せよ.

(1) $A = \{x \in \mathbb{Q} ; x > 0, x^2 < a\}$ とおくと, A は上に有界である.

(2) $\sup A$ は存在しない.

2.2 数列の極限

● 実数体上のノルム・距離

[1] 次のことを証明せよ.

$$(1) \sqrt{x^2} = |x| \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$(2) -|x| \leq x \leq |x| \quad (x \in \mathbb{R}).$$

[2] 次のことを証明せよ.

$$(1) \forall x \in \mathbb{R}, \forall a \geq 0, (|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a).$$

$$(2) \forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, (|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a).$$

[3] (中線定理) 次の等式

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

が成り立つことを証明せよ.

[4] 次の不等式

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

が成り立つことを証明せよ.

● 数列の収束・発散

5 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+1}.$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$

6 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \ (a > 0).$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$

7 任意の $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \pm 1$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & (|a| < 1), \\ \infty & (|a| > 1) \end{cases}$$

が成り立つことを証明せよ.

8 $a, b > 0$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 \geq -\frac{b}{a}, \quad a_{n+1} = \sqrt{aa_n + b} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義する. $x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$ とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_{n+1} - x| \leq \frac{a}{x} |a_n - x|$$

が成り立つ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x.$

9 (Newton の逐次近似法) $a > 0$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$\sqrt{a} < a_0 < 3\sqrt{a}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sqrt{a} < a_n < 3\sqrt{a}$ であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}} (a_n - \sqrt{a})^2$$

が成り立つ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{a}.$

【補足】 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\sqrt{a}$ に **2 次収束** すると言う.

10 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $a + d > 0$, $ad - bc \neq 0$, $(a - d)^2 + 4bc > 0$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 \neq \frac{a - d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}, \quad a_{n+1} = \frac{aa_n + b}{ca_n + d} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義する. $x^\pm = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}$ とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) 数列 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$b_n = \frac{a_n - x^+}{a_n - x^-} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義すると,

$$b_{n+1} = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}} b_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x^+$.

11 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $a + d \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, $(a - d)^2 + 4bc = 0$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 \neq \frac{a - d}{2c}, \quad a_{n+1} = \frac{aa_n + b}{ca_n + d} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義する. $x = \frac{a - d}{2c}$ とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) 数列 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$b_n = \frac{1}{a_n - x} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義すると,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{c(a + d)}{2(ad - bc)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$.

12 (指定演習問題 3) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とし, 数列 $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$c_n = \begin{cases} a_m & (n = 2m), \\ b_m & (n = 2m + 1) \end{cases}$$

によって定義するとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(ii) $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する.

さらに, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (i) または (ii) を満たせば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

が成り立つことを証明せよ.

- 13 (Cesàro の定理) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を収束する数列とすると、 $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right\}_{n \geq 1}$ は収束し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

が成り立つことを証明せよ。

- 14 $\{a_n\}_{n \geq 1}, \{b_n\}_{n \geq 1}$ を収束する数列とすると、 $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} \right\}_{n \geq 1}$ は収束し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つことを証明せよ。

- 15 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を正数列 ($\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$) とすると、次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ。

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

- 16 (Stolz-Cesàro の定理) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列で、次の (i), (ii) を満たすものとする。

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n > 0$, かつ $\left\{ \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する。

このとき、 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

が成り立つことを証明せよ。

- 17 数列の関係 $\sim$ を

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

によって定義するとき、 $\sim$ は数列の同値関係である。つまり、次の (i)–(iii) を満たすことを証明せよ。

(i) (反射律) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(ii) (対称律) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(iii) (推移律) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

- 18 (ε 論法) $a, b \in \mathbb{R}$ とするとき、任意の $x > b$ に対して $a < x$ ならば、 $a \leq b$ であることを証明せよ。

2.3 実数体の Cauchy 完備性

● 単調収束公理

- [1] $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \sup A$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことであることを証明せよ.

(i) α は A の上界である.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ となる A の点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する.

- [2] $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合, $\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき, $\alpha = \inf A$ であるための必要十分条件は, α が次の (i), (ii) を満たすことであることを証明せよ.

(i) α は A の下界である.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ となる A の点列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する.

- [3] 次の $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ の上限, 下限をそれぞれ求めよ.

(1) $A = \left\{ \frac{2^n - 1}{2^n + 1} ; n \in \mathbb{N} \right\}.$

(2) $A = \left\{ \frac{n}{n^2 + 1} ; n \in \mathbb{N} \right\}.$

- [4] $\pi \leq \theta < 2\pi$ とするとき, $A = \left\{ n \sin \frac{\theta}{n} ; n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$ の上限, 下限をそれぞれ求めよ.

- [5] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を単調増加数列とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は上に有界でない.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$

- [6] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を狭義単調増加数列, $b \in \mathbb{R}$ とするとき, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < b$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b] = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b \right]$$

が成り立つことを証明せよ.

- [7] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を単調減少数列とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は下に有界でない.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$

- [8] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を狭義単調減少数列, $b \in \mathbb{R}$ とするとき, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < b$ ならば,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b \right)$$

が成り立つことを証明せよ.

- 9 $x > 0$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}, \{s_n\}_{n \geq 1}$ をそれぞれ

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は収束し, $a_n \leq s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$).
- (2) $\{s_n\}_{n \geq 1}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

- 10 $1 < a \leq e$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 \leq a, \quad a_{n+1} = a^{\frac{a_n}{a}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次の を埋めよ.

- (1) $a_0 < a$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.
- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{}$.

- 11 (Newton の逐次近似法) $a > 0$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 > \sqrt{a}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次の を埋めよ.

- (1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.
- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{}$.

- 12 $a > 0$ とするとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $a < 1$ ならば, $\{\sqrt[n]{a}\}_{n \geq 1}$ は狭義単調増加かつ上に有界である.
- (2) $a > 1$ ならば, $\{\sqrt[n]{a}\}_{n \geq 1}$ は狭義単調減少かつ下に有界である.
- (3) $\{\sqrt[n]{a}\}_{n \geq 1}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

- 13 $a, b > 0$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 \geq -\frac{b}{a}, \quad a_{n+1} = \sqrt{aa_n + b} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義する. $x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$ とおくとき, 次の を埋めよ.

- (1) $a_0 < x$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.
- (2) $a_0 > x$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.
- (3) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{}$.

- 14 $a, b > 0, ab > 1$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$0 < a_0 < b, \quad a_{n+1} = -aa_n(a_n - b) \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義する. $x = b - \frac{1}{a}$ とおくとき, 次の を埋めよ.

- (1) $a_0 < x$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.
- (2) $a_0 > x$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.
- (3) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{}$.

- 15 正数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{2} \leq a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たすとき, 次の を埋めよ.

- (1) $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は単調 かつ に有界である.
- (2) $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{}$.
- (3) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は単調 である.

- 16 (算術調和平均) $0 < a < b$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次の を埋めよ.

- (1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.
- (2) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.
- (3) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

- 17 (算術幾何平均) $0 < a < b$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次の (1), (2) の を埋め, (3) を証明せよ.

- (1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.
- (2) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.
- (3) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

● Archimedes の公理

18 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) Archimedes の公理.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$.

19 (指定演習問題 4) 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) Archimedes の公理.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

20 (剰余定理) 任意の $(n, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ に対し,

$$n = dq + r$$

を満たす $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1, \dots, d-1\}$ が一意に存在することを証明せよ.

21 次のことを証明せよ.

(1) 有理数と無理数の和は無理数である.

(2) $x < y$ を満たす任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$x < s < y$$

を満たす $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在する.

22 (p 進展開) $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ とするとき, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, 次の (i), (ii) を満たす整数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在することを証明せよ.

(i) $x_0 \in \mathbb{Z}$, $x_n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n \leq p-1$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$).

(ii) 数列 $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$r_n = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{p^k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義すると, $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ となる有理数列である.

● Cantor の公理

23 (相加相乗平均) $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a_k > 0$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) とするとき,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

が成り立つことを証明せよ.

【ヒント】 次の不等式

$$\log x \leq x - 1 \quad (x > 0)$$

が成り立つことを証明してから, $x = \frac{a_k}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) を代入する.

24 $a > 0$, $a \neq 1$ とするとき, 次の不等式を証明せよ.

$$(1) \quad a^n < \left(\frac{na+1}{n+1} \right)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1).$$

$$(2) \quad \left(\frac{1}{a} \right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{na+a+1} \right)^{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1).$$

25 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$, $\{b_n\}_{n \geq 1}$ をそれぞれ

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) $\{a_n\}_{n \geq 1}$ は狭義単調増加である.

(2) $\{b_n\}_{n \geq 1}$ は狭義単調減少である.

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

26 (算術幾何平均) $0 < a < b < 9a$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a \leq a_n < b_n \leq b$ であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{8a} (b_n - a_n)^2$$

が成り立つ.

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

● Bolzano-Weierstrass の公理

27 $A \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合, $a \in \mathbb{R}$ とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) a は A の**集積点**である. つまり, 任意の $r > 0$ に対して

$$(a - r, a + r) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

である.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \neq a$, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となる A の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する.

28 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とすると, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するための必要十分条件は, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が次の (i), (ii) を満たすことであることを証明せよ.

(i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有界である.

(ii) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の集積点が存在すれば, それは一意である.

● Cauchy の公理

29 数列の関係 $\sim$ を

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

によって定義するとき, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ならば, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

- (i) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である.
- (ii) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である.

30 数列 $\{s_n\}_{n \geq 1}$ を

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $m \leq n$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ に対して

$$s_n - s_m \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

が成り立つ.

- (2) $\{s_n\}_{n \geq 1}$ は Cauchy 列である.

31 数列 $\{s_n\}_{n \geq 1}$ を

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $m \leq n$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ に対して

$$s_n - s_m \geq 1 - \frac{m}{n}$$

が成り立つ.

- (2) $\{s_n\}_{n \geq 1}$ は Cauchy 列でない.

32 (指定演習問題 5) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とし, 数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$s_n = \sum_{k=0}^n |a_{k+1} - a_k| \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $m \leq n$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ に対して

$$|a_n - a_m| \leq s_{n-1} - s_{m-1}$$

が成り立つ.

- (2) $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Cauchy 列ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である.

33 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列で, ある $0 < r < 1$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}|$$

が成り立つものとするとき, 次のことを証明せよ.

(1) $m < n$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \frac{r^m - r^n}{1 - r} |a_1 - a_0|$$

が成り立つ.

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である.

34 $a, b > 0$, $ab \leq 1$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$-\sqrt{\frac{b}{a}} \leq a_0 \leq \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad a_{n+1} = -aa_n^2 + b \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して $0 \leq a_n \leq b$ であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq 2ab|a_n - a_{n-1}|$$

が成り立つ.

(2) $ab < \frac{1}{2}$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する.

35 $a \geq 0$, $b > 0$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_{n+1} = a + \frac{b}{a_n^2 + a_n + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ に対して $a \leq a_n \leq a + \frac{4}{3}b$ であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ に対して

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{(2a+1)b}{(a^2+a+1)^2} |a_n - a_{n-1}|$$

が成り立つ.

(2) $b < \frac{(a^2+a+1)^2}{2a+1}$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束する.

36 (Fibonacci 数列) 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束することを証明し, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ の値を求めよ.

第3章 関数の極限と連続関数

3.1 関数の極限

● $x \rightarrow a$ での極限

[1] 次の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}.$$

[2] (指定演習問題 6) $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$f(x) - f(y) = a_1(x-y) + a_2(x-y)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たす $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ を求めよ.

(2) 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し, $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$ となることを証明せよ.

[3] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$f(x) - f(y) = a_1(x-y) + a_2(x-y)^2 + a_3(x-y)^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たす $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ を求めよ.

(2) 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対し, $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$ となることを証明せよ.

[4] $a \neq 0$ とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q}), \\ a & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

によって定義する. $x \rightarrow 0$ のとき, $f(x)$ が収束するか否かを判定し, 収束すれば, 極限值を求めよ.

- 5 (Dirichlet 関数) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

によって定義する. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ は収束しないことを証明せよ.

【ヒント】Archimedes の公理を用いる.

- 6 $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ が収束すれば, $|f(x)|$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|$$

が成り立つことを証明せよ.

- 7 $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f, g: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. f が $I \setminus \{a\}$ で有界, かつ $x \rightarrow a$ のとき, $g(x)$ が 0 に収束すれば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

- 8 $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f, g: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x), g(x)$ が収束すれば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \max\{f(x), g(x)\} = \max\left\{\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)\right\}$$

が成り立つことを証明せよ.

- 9 $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f, g: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x), g(x)$ が収束すれば,

$$\lim_{x \rightarrow a} \min\{f(x), g(x)\} = \min\left\{\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)\right\}$$

が成り立つことを証明せよ.

- 10 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

によって定義する. $x \rightarrow 0$ のとき, $f(x)$ が収束するか否かを判定し, 収束すれば, 極限値を求めよ.

• $x \rightarrow a \pm 0$ での極限

[11] (Heaviside 関数) $\mathbb{R}$ 上の関数 $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

によって定義するとき, $\lim_{x \rightarrow +0} H(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -0} H(x) = 0$ となることを証明せよ.

[12] 次の極限が存在するか否かを判定し, 存在すれば, 極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \sin x.$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \cos x.$

[13] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $(a, b]$ 上の単調増加関数とすると, 次のことを証明せよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ となる $(a, b]$ の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で, 数列 $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するものが存在すれば, $x \rightarrow a + 0$ のとき, $f(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

が成り立つ.

(2) f が $(a, b]$ で下に有界ならば, $x \rightarrow a + 0$ のとき, $f(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf_{a < x \leq b} f(x)$$

が成り立つ.

[14] $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b)$ 上の単調増加関数とすると, 次のことを証明せよ.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ となる $[a, b)$ の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で, 数列 $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するものが存在すれば, $x \rightarrow b - 0$ のとき, $f(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

が成り立つ.

(2) f が $[a, b)$ で上に有界ならば, $x \rightarrow b - 0$ のとき, $f(x)$ は収束し,

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \sup_{a \leq x < b} f(x)$$

が成り立つ.

• $x \rightarrow \pm\infty$ での極限

15 $\alpha > 0$ とし, $(0, \infty)$ 上の関数 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

によって定義する. $x \rightarrow \infty$ のとき, $f(x)$ が収束するか否かを判定し, 収束すれば, 極限値を求めよ.

16 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = x - [x] \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義する. $x \rightarrow \infty$ のとき, $f(x)$ が収束するか否かを判定し, 収束すれば, 極限値を求めよ.

3.2 連続関数, 一様連続関数, 半連続関数

● 連続関数

[1] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ を

$$f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

- (1) 任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対して $\delta(\varepsilon) = \log(1 + \varepsilon)$ とおくと, $\delta(\varepsilon) > 0$ であり, $|x| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|e^x - 1| < \varepsilon$$

が成り立つ.

- (2) f は $\mathbb{R}$ で連続である.

[2] $(0, \infty)$ 上の関数 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \log x \quad (x > 0)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

- (1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{e^\varepsilon}$ とおくと, $\delta(\varepsilon) > 0$ であり, $|x - 1| < \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|\log x| < \varepsilon$$

が成り立つ.

- (2) f は $(0, \infty)$ で連続である.

[3] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の开区間 (定理 0.3.1(i), (iv), (vi)), $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数とする. $x \rightarrow a \pm 0$ のとき, $f(x)$ が収束し, かつ

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

ならば, $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ は収束しないことを証明せよ.

【補足】 a を f の**第一種不連続点**と言う.

[4] $(0, \infty)$ 上の関数 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \left(x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \text{既約分数, } q > 0 \right), \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

によって定義するとき, f は $(0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$ で連続であるが, $(0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ の任意の点で連続でないことを証明せよ.

● 一様連続関数

[5] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数 f が $\mathbb{R}$ で一様連続であるか否かを判定せよ.

- (1) $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$).
- (2) $f(x) = e^x$.

[6] 次の $(0, \infty)$ 上の関数 f が $(0, \infty)$ で一様連続であるか否かを判定せよ.

- (1) $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha > 0$).
- (2) $f(x) = \log x$.

定義. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とする.

$$\omega(f; I, \delta) = \sup_{x, y \in I, |x-y| < \delta} |f(x) - f(y)| \quad (\delta > 0)$$

によって定義される $\omega(f; I, *) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ を f の I での振幅と言う.

[7] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数 f の $\mathbb{R}$ での振幅 $\omega(f; \mathbb{R}, *)$ を求めよ.

- (1) $f(x) = x$.
- (2) $f(x) = x^2$.

[8] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

- (i) f は I で一様連続である.
- (ii) $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(f; I, \delta) = 0$.

[9] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $c \in \mathbb{R}$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とすると, 次のことを証明せよ.

- (1) $\omega(f+g; I, \delta) \leq \omega(f; I, \delta) + \omega(g; I, \delta)$ ($\delta > 0$).
- (2) $\omega(cf; I, \delta) = |c|\omega(f; I, \delta)$ ($\delta > 0$).

[10] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $c \in \mathbb{R}$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とすると, 次のことを証明せよ.

- (1) f, g が I で一様連続ならば, $f+g$ は I で一様連続である.
- (2) f が I で一様連続ならば, cf は I で一様連続である.

[11] $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$, $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ を $\mathbb{R}$ の区間, $I = I_1 \cup I_2$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とすると, 次のことを証明せよ.

- (1) $\omega(f; I, \delta) \leq \omega(f; I_1, \delta) + \omega(f; I_2, \delta)$ ($\delta > 0$).
- (2) f が I_1, I_2 で一様連続ならば, f は I で一様連続である.

[12] $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とすると, f が (a, b) で連続であり, かつ

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \beta$$

となる $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在すれば, f は $[a, b]$ で一様連続であることを証明せよ.

13 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

が $\mathbb{R}$ で一様連続であるか否かを判定せよ.

14 (Cauchy の関数方程式) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

を満たすとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $f(ax) = af(x)$ ($a \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$).
- (2) f が 0 で連続ならば, f は $\mathbb{R}$ で一様連続である.
- (3) f が 0 で連続ならば, $f(x) = f(1)x$ ($x \in \mathbb{R}$).

【ヒント】 Archimedes の公理を用いる.

15 (Cauchy の関数方程式) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

を満たすとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $f(0) = 1$.
- (2) $f(x) > 0$ ($x \in \mathbb{R}$).
- (3) f が 0 で連続ならば, $f(x) = e^{(\log f(1))x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

16 $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ を $I \setminus \{a\}$ 上の関数で, ある $L > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ が存在し,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad (x, y \in I, x, y \neq a)$$

が成り立つものとする. $x \rightarrow a$ のとき, $f(x)$ は収束することを証明せよ.

【補足】 f は $I \setminus \{a\}$ で **Hölder 連続** ($0 < \alpha < 1$) または **Lipschitz 連続** ($\alpha = 1$) であると言う.

3.3 中間値の定理, 逆関数の定理, 最大値の定理

● 中間値の定理

- [1] 次の方程式の根の個数とそれらの位置を $n \in \mathbb{Z}$, $n < x < n+1$ の範囲で求めよ.

(1) $x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$.

(2) $x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = 0$.

- [2] $a \in \mathbb{R}$ とするとき, 次の方程式

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{a}{x}$$

の根の個数とそれらの位置を $n \in \mathbb{Z}$, $n < x < n+1$ の範囲で求めよ.

- [3] (指定演習問題 7) (正数の n 乗根) $a > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ とするとき,

$$x^n = a$$

を満たす $1 < x \leq a$ が一意に存在することを証明せよ.

- [4] (中間値の定理) $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を (a, b) 上の関数とするととき, f が (a, b) で連続であり, かつ

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \beta$$

となる $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \neq \beta$ が存在すれば, $c = \min\{\alpha, \beta\}$, $d = \max\{\alpha, \beta\}$ とおくと, 任意の $c < y_0 < d$ に対し,

$$f(x_0) = y_0$$

を満たす $a < x_0 < b$ が存在することを証明せよ.

- [5] 次の (i), (ii) を満たす $\mathbb{R}$ 上の関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を一つ挙げよ.

(i) f は $\mathbb{R}$ で連続であり, かつ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \beta$$

となる $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ii) $c = \min\{\alpha, \beta\}$, $d = \max\{\alpha, \beta\}$ とおくと, ある $c \leq y_0 \leq d$ が存在し, 任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x_0) \neq y_0$$

である.

- [6] (Brouwer の不動点定理) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ を $[a, b]$ 上の関数とするととき, f が $[a, b]$ で連続ならば,

$$f(x_0) = x_0$$

を満たす $a \leq x_0 \leq b$ が存在することを証明せよ.

- [7] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f : I \rightarrow \mathbb{Q}$ を I 上の有理数値関数とするととき, f が I で連続ならば, f は I で定数であることを証明せよ.

● 逆関数の定理

8 $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間とすると、次の (i), (ii) を満たす I 上の関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を一つ挙げよ.

- (i) f は I から $\mathbb{R}$ への単射である.
- (ii) f は I で狭義単調でない.

定義. 次の関数

$$\begin{cases} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} & (x \in \mathbb{R}), \\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

によって定義される $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ**双曲余弦関数**, **双曲正弦関数**と言う.

9 $[0, \infty)$ 上の関数 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \cosh x \quad (x \geq 0)$$

によって定義するとき、次の問いに答えよ.

- (1) $f([0, \infty)) \subseteq \mathbb{R}$ を求めよ.
- (2) f が $[0, \infty)$ で狭義単調増加であることを証明し、 $f^{-1} : f([0, \infty)) \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ.

10 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \sinh x \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき、次の問いに答えよ.

- (1) $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ を求めよ.
- (2) f が $\mathbb{R}$ で狭義単調増加であることを証明し、 $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ.

定義. 次の関数

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義される $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を**双曲正接関数**と言う.

11 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \tanh x \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき、次の問いに答えよ.

- (1) $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ を求めよ.
- (2) f が $\mathbb{R}$ で狭義単調増加であることを証明し、 $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ.

● 最大値の定理

- [12] $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の関数とするとき, f が $[a, b]$ で連続であり, かつ $\forall x \in [a, b], f(x) \neq 0$ ならば, $\frac{1}{f}$ は $[a, b]$ で有界であることを証明せよ.
- [13] $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ とするとき, 次の (i), (ii) を満たす $[a, b]$ 上の関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を一つ挙げよ.
- (i) f の $[a, b]$ での最大値は存在しない.
 - (ii) f の $[a, b]$ での最小値は存在しない.
- [14] $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ とするとき, 次の (i), (ii) を満たす $[a, b]$ 上の関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を一つ挙げよ.
- (i) f は $[a, b]$ で上半連続である.
 - (ii) f の $[a, b]$ での最小値は存在しない.
- [15] $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ とするとき, 次の (i), (ii) を満たす $[a, b]$ 上の関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を一つ挙げよ.
- (i) f は $[a, b]$ で下半連続である.
 - (ii) f の $[a, b]$ での最大値は存在しない.

第4章 導関数と平均値の定理

4.1 導関数と接線

● 導関数

- [1] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とすると, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

- (i) f は a で微分可能である.
(ii) I 上の関数 $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ で, a で連続であり,

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a) \quad (x \in I)$$

を満たすものが存在する.

さらに, f が (i) または (ii) を満たせば, $f'(a) = \varphi(a)$ が成り立つことを証明せよ.

- [2] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0), \\ -x^2 & (x \leq 0) \end{cases}$$

が $\mathbb{R}$ で微分可能であるか否かを判定し, 微分可能ならば, f' を求めよ.

- [3] $a > 0$ とするとき, 次の $[-a, a]$ 上の関数

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a)$$

が $[-a, a]$ で微分可能であるか否かを判定し, 微分可能ならば, f' を求めよ.

- [4] (指定演習問題 8) 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

が $\mathbb{R}$ で微分可能であるか否かを判定し, 微分可能ならば, f' を求めよ.

- [5] (はさみうちの原理) $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f, g, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とすると, 任意の $x \in I$ に対して $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, かつ f, g が a で微分可能であり, $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ ならば, h は a で微分可能であり,

$$h'(a) = f'(a) = g'(a)$$

が成り立つことを証明せよ.

[6] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

が 0 で微分可能であるか否かを判定し, 微分可能ならば, $f'(0)$ の値を求めよ.

[7] $a > 0$, $f : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ を $(-a, a)$ 上の関数とし, $(-a, a)$ 上の関数 $f^e, f^o : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$f^e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f^o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (-a < x < a)$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

- (1) $f(x) = f^e(x) + f^o(x)$ ($-a < x < a$).
- (2) f^e は偶関数 ($\Leftrightarrow \forall x \in (-a, a), f^e(-x) = f^e(x)$) である.
- (3) f^o は奇関数 ($\Leftrightarrow \forall x \in (-a, a), f^o(-x) = -f^o(x)$) である.

[8] $a > 0$, $f : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ を $(-a, a)$ 上の微分可能関数とすると, 次のことを証明せよ.

- (1) f が偶関数ならば, f' は奇関数である.
- (2) f が奇関数ならば, f' は偶関数である.

[9] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a, b, c, d : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の微分可能関数とする. I 上の関数 $A : I \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ を

$$A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \quad (x \in I)$$

によって定義するとき,

$$(\det A)'(x) = \det \begin{pmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{pmatrix} \quad (x \in I)$$

が成り立つことを証明せよ.

● Landau の記号

定義 (Landau の記号). $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ とする.

(1) $I_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} ; 0 < |x - a| < \delta\}$ を a の**除外近傍**という.

(2) $f, g : I_\delta(a) \rightarrow \mathbb{R}$ を $I_\delta(a)$ 上の関数とする. $f(x) \sim g(x) \ (x \rightarrow a)$ であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

となることを言う. このとき, $f(x) = g(x) \ (x \rightarrow a)$ と書く.

10 $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f, g, h : I_\delta(a) \rightarrow \mathbb{R}$ を $I_\delta(a)$ 上の関数とすると, 次のことを証明せよ.

(1) $f(x) < h(x)$, $g(x) < h(x) \ (x \rightarrow a)$ ならば, $f(x) + g(x) < h(x) \ (x \rightarrow a)$.

(2) f が $I_\delta(a)$ で有界, かつ $g(x) < h(x) \ (x \rightarrow a)$ ならば, $f(x)g(x) < h(x) \ (x \rightarrow a)$.

11 $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f, g, h : I_\delta(a) \rightarrow \mathbb{R}$ を $I_\delta(a)$ 上の関数とすると, 次のことを証明せよ.

(1) (反射律) $f(x) = f(x) \ (x \rightarrow a)$.

(2) (対称律) $f(x) = g(x) \ (x \rightarrow a)$ ならば, $g(x) = f(x) \ (x \rightarrow a)$.

(3) (推移律) $f(x) = g(x)$, $g(x) = h(x) \ (x \rightarrow a)$ ならば, $f(x) = h(x) \ (x \rightarrow a)$.

4.2 平均値の定理

- [1] (Rolle の定理) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上の微分可能関数とする. $x \rightarrow \pm\infty$ のとき, $f(x)$ が収束し, かつ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

が成り立てば,

$$f'(x_0) = 0$$

を満たす $x_0 \in \mathbb{R}$ が存在することを証明せよ.

- [2] $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能な関数とすると,

$$\det \begin{pmatrix} f'(x_0) & g'(x_0) & h'(x_0) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix} = 0$$

を満たす $a < x_0 < b$ が存在することを証明せよ.

【補足】 $h = 1$ のとき, [2] は Cauchy の平均値の定理である.

- [3] (指定演習問題 9) $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能な関数, $L \geq 0$ とするとき, 次の (i), (ii) が同値であることを証明せよ.

(i) $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad (a \leq x, y \leq b).$

(ii) $|f'(x)| \leq L \quad (a < x < b).$

- [4] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の関数とすると, ある $L \geq 0, \alpha > 1$ が存在し,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad (x, y \in I)$$

が成り立てば, f は I で定数であることを証明せよ.

- [5] (中間値の定理) $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の微分可能関数とし, $c = \min\{f'(a), f'(b)\}$, $d = \max\{f'(a), f'(b)\}$ とおくと, $f'(a) \neq f'(b)$ ならば, 任意の $c < y_0 < d$ に対し,

$$f'(x_0) = y_0$$

を満たす $a < x_0 < b$ が存在することを証明せよ.

- [6] $1 < a < e$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 > a, \quad a_{n+1} = a^{\frac{a_n}{a}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次の (1) を証明し, (2), (3) の を埋めよ.

(1) $x = a^{\frac{x}{a}}$ を満たす $x > e$ が一意に存在する.

(2) $a_0 < x$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.

(3) $a_0 \leq x$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{}$.

[7] $a > 1$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a_0 > e^{-a} - a, \quad a_{n+1} = \log(a_n + a) \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義するとき, 次の (1), (2) を証明し, (3)–(5) の を埋めよ.

(1) $x^- = \log(x^- + a)$ を満たす $e^{-a} - a < x^- < 0$ が一意に存在する.

(2) $x^+ = \log(x^+ + a)$ を満たす $x^+ > 0$ が一意に存在する.

(3) $x^- < a_0 < x^+$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.

(4) $a_0 > x^+$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調 かつ に有界である.

(5) $a_0 \geq x^-$ ならば, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{}$.

[8] $n \in \mathbb{N}$ とし, $(0, 1]$ 上の関数 $s_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad (0 < x \leq 1)$$

によって定義するとき,

$$s_{2n+1}(x) < \log(1+x) < s_{2n}(x) \quad (0 < x \leq 1)$$

が成り立つことを証明せよ.

[9] $n \in \mathbb{N}$ とし, $(0, 1]$ 上の関数 $s_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad (0 < x \leq 1)$$

によって定義するとき,

$$s_{2n+1}(x) < \arctan x < s_{2n}(x) \quad (0 < x \leq 1)$$

が成り立つことを証明せよ.

[10] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を I で連続かつ $I \setminus \{a\}$ で微分可能な関数とする. $x \rightarrow a$ のとき, $f'(x)$ が収束すれば, f は a で微分可能であり,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

が成り立つことを証明せよ.

[11] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

が $\mathbb{R}$ で微分可能であるか否かを判定し, 微分可能ならば, f' を求めよ.

4.3 de l'Hôpital の法則

• $\frac{0}{0}$ の不定形

[1] 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{-x}}{b^x - b^{-x}} \quad (a, b > 0).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}.$$

[2] 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}.$$

[3] 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a, b > 0).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

[4] 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \frac{x-a}{x-b} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\sin x)^{\tan x}.$$

[5] 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)} \right\}.$$

• $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形

[6] 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(a^x + a^{-x})}{x} \quad (a > 0).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log \sin x}{\log x}.$$

[7] 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \quad (\alpha > 0).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +0} x^{x^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

[8] 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(a^x - 1)}{\log x} \quad (a > 1).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(1 - \cos x)}{\log x}.$$

[9] $a \in \mathbb{R}$, $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を (a, ∞) 上の微分可能関数とする. $x \rightarrow \infty$ のとき, $f'(x)$ が収束するとき, 次のことを証明せよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) > 0 \right), \\ -\infty & \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) < 0 \right). \end{cases}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x).$$

第5章 高階導関数とTaylorの定理

5.1 高階導関数と関数の極大・極小

• n 階導関数

[1] (スプライン関数) 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

は $\mathbb{R}$ で C^1 級であるが, 0 で C^2 級でないことを証明せよ.

[2] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は $\mathbb{R}$ で微分可能であるが, 0 で C^1 級でないことを証明せよ.

[3] $\mathbb{R}$ 上の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

が成り立つ. ただし, p_n は次の漸化式

$$p_0(x) = 1, \quad p_{n+1}(x) = x^2 p_n'(x) - 2nx p_n(x) + p_n(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義される n 次以下の多項式である.

(2) f は $\mathbb{R}$ で C^∞ 級である.

[4] $a > 0$, $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ を $(-a, a)$ 上の C^∞ 級関数とすると, 次のことを証明せよ.

(1) f が偶関数ならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

(2) f が奇関数ならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f^{(2n)}(0) = 0$.

5 (Legendre 多項式) $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$P_n(x) = \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) P_n は n 次多項式であり, P_n の最高次の係数は $\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ である.

(2) n 個の $P_n(x) = 0$ の $(-1, 1)$ での根 $x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)}$ が存在し,

$$x_{k-1}^{(n-1)} < x_k^{(n)} < x_k^{(n-1)} \quad (k \in \{1, \dots, n\})$$

が成り立つ. ただし, $x_0^{(n-1)} = -1, x_n^{(n-1)} = 1$.

6 (Hermite 多項式) $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) H_n は n 次多項式であり, H_n の最高次の係数は 2^n である.

(2) n 個の $H_n(x) = 0$ の $\mathbb{R}$ での根 $x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)}$ が存在し,

$$x_{k-1}^{(n-1)} < x_k^{(n)} < x_k^{(n-1)} \quad (k \in \{1, \dots, n\})$$

が成り立つ. ただし, $x_0^{(n-1)} = -\infty, x_n^{(n-1)} = \infty$.

7 (Laguerre 多項式) $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$$

によって定義するとき, 次のことを証明せよ.

(1) L_n は n 次多項式であり,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-x)^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

(2) n 個の $L_n(x) = 0$ の $\mathbb{R}$ での根 $x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)}$ が存在し,

$$x_{k-1}^{(n-1)} < x_k^{(n)} < x_k^{(n-1)} \quad (k \in \{1, \dots, n\})$$

が成り立つ. ただし, $x_0^{(n-1)} = -\infty, x_n^{(n-1)} = \infty$.

● 関数の極大・極小

定義. $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の開区間 (定理 0.3.1(i), (iv), (vi)), $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の微分可能関数とする.

- (1) f が $a \in I$ で (上から下への) **変曲** であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $a - \delta < x < a < x' < a + \delta$ を満たす任意の $x, x' \in I$ に対して

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} > f'(a), \quad \frac{f(x') - f(a)}{x' - a} > f'(a)$$

が成り立つことを言う.

- (2) f が $a \in I$ で (下から上への) **変曲** であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $a - \delta < x < a < x' < a + \delta$ を満たす任意の $x, x' \in I$ に対して

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} < f'(a), \quad \frac{f(x') - f(a)}{x' - a} < f'(a)$$

が成り立つことを言う.

- [8] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の開区間 (定理 0.3.1(i), (iv), (vi)), $a \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^2 級関数とするととき, f が a で変曲ならば, $f''(a) = 0$ であることを証明せよ.

- [9] $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき, 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+b)x^2 + abx + c \quad (x \in \mathbb{R})$$

が極大, 極小, 変曲となる点をそれぞれ求めよ.

- [10] 次の $(0, \infty)$ 上の関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

が極大, 極小, 変曲となる点をそれぞれ求めよ.

- [11] 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が極大, 極小, 変曲となる点をそれぞれ求めよ.

- [12] $a > 0$ とするとき, 次の $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

が極大, 極小, 変曲となる点をそれぞれ求めよ.

5.2 Taylor の定理

- [1] $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \{0, 1, \dots, n\}$), $a_n \neq 0$ とし, 多項式 $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義する. 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$$p(x) = b_n(x-a)^n + \dots + b_1(x-a) + b_0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たす $b_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \{0, 1, \dots, n\}$) を求めよ.

- [2] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^2 級関数とするとき, 次の (i)–(iii) が互いに同値であることを証明せよ.

(i) f は I で下に凸である. つまり, 任意の $a, b \in I$ に対して

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

が成り立つ.

(ii) $a < b$ を満たす任意の $a, b \in I$ に対して

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad (a < x < b)$$

が成り立つ.

(iii) $-f'' \leq 0$. つまり, $\forall x \in I$, $-f''(x) \leq 0$.

- [3] $I \subseteq \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ を I 上の C^2 級関数とするとき, 次の (i)–(iii) が互いに同値であることを証明せよ.

(i) f は I で上に凸である. つまり, 任意の $a, b \in I$ に対して

$$f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

が成り立つ.

(ii) $a < b$ を満たす任意の $a, b \in I$ に対して

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad (a < x < b)$$

が成り立つ.

(iii) $-f'' \geq 0$. つまり, $\forall x \in I$, $-f''(x) \geq 0$.

- [4] (Jordan の不等式) 次の不等式

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つことを証明せよ.

- [5] (1 階前進差分) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の C^2 級関数とし,

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (a < x < b, 0 < h \leq \min\{x-a, b-x\})$$

とおくとき,

$$\left| \frac{\Delta_h f(x)}{h} - f'(x) \right| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| h \quad (a < x < b, 0 < h \leq \min\{x-a, b-x\})$$

が成り立つことを証明せよ.

- [6] (指定演習問題 10) (1 階中心差分) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の C^3 級関数とし,

$$\delta_h f(x) = f(x+h) - f(x-h) \quad (a < x < b, 0 < h \leq \min\{x-a, b-x\})$$

とおくとき,

$$\left| \frac{\delta_h f(x)}{2h} - f'(x) \right| \leq \frac{1}{6} \max_{x \in [a, b]} |f'''(x)| h^2 \quad (a < x < b, 0 < h \leq \min\{x-a, b-x\})$$

が成り立つことを証明せよ.

- [7] (中間値の定理) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の連続関数とし, $c = \min\{f(a), f(b)\}$, $d = \max\{f(a), f(b)\}$ とおくとき, f が $[a, b]$ で狭義単調ならば, 任意の $c < y_0 < d$ に対し,

$$f(x_0) = y_0$$

を満たす $a < x_0 < b$ が一意に存在することを証明せよ.

- [8] (Newton の逐次近似法) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上の C^2 級関数で, 次の (i)–(iii) を満たすものとする.

(i) $f(a) < 0 < f(b)$.

(ii) $f' > 0$. つまり, $\forall x \in [a, b], f'(x) > 0$.

(iii) $f'' \geq 0$. つまり, $\forall x \in [a, b], f''(x) \geq 0$.

数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次の漸化式

$$a < x_0 \leq b, \quad f(x_0) > 0, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義し, $a < \alpha < b$ を $f(x) = 0$ の解とする.

$$c = \frac{1}{2} \max_{x \in [a, b]} \frac{f''(x)}{f'(x)}$$

とおくとき, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c |x_n - \alpha|^2$$

が成り立つ.

(2) $|x_0 - \alpha| < \frac{1}{c}$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$.

5.3 初等関数の Taylor 多項式

● 幾何級数, 指数関数, 対数関数, 冪関数

[1] $n \in \mathbb{N}$ とし, $(0, \infty)$ 上の関数 $s_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad (x > 0)$$

によって定義するとき,

$$s_{n+1}(x) < e^x < s_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x \quad (x > 0)$$

が成り立つことを証明せよ.

[2] 次のことを証明せよ.

(1) $e = 2.718 \dots$.

(2) e は無理数である.

[3] 次のことを証明せよ.

(1) $\sqrt{5} = 2.236 \dots$.

(2) $\sqrt[3]{28} = 3.0365 \dots$.

[4] 次の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0)$$

で近似せよ.

(1) $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

(2) $f(x) = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$.

[5] 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 \right)$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1+bx}} - \frac{1}{\sqrt{1+ax}} \right) \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq b)$.

● 三角関数, 逆三角関数

[6] $n \in \mathbb{N}$ とし, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上の関数 $s_n : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

によって定義するとき,

$$s_{2n+1}(x) < \sin x < s_{2n}(x) \quad \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つことを証明せよ.

[7] 次のことを証明せよ.

(1) $\sin 1 = 0.841 \dots$.

(2) $\sin 1$ は無理数である.

[8] 次の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

で近似せよ.

(1) $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$.

(2) $f(x) = \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x}$.

[9] 次の極限值を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \sin x - \log x}{x^2}$.

関連図書

- [1] 齋藤 正彦, 微分積分学, 東京図書, 2006 年.
- [2] 杉浦 光夫, 解析入門 I(基礎数学), 東京大学出版会, 1980 年.
- [3] 難波 誠, 微分積分学 (数学シリーズ), 裳華房, 1996 年.