

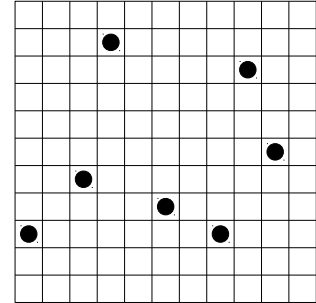
以下の問題で, k , T はそれぞれボルツマン定数と温度であり, $\beta = 1/(kT)$ である.

[問題 1] 以下の空欄 (1)~(5) に当てはまる語句または数式を下の選択肢 (ア)~(セ) から選べ.

小正準集合は先見的等確率の原理が成り立つ集合である. 小正準集合がとる微視的状态の総数を重率と呼び, これを W とすると小正準集合でのエントロピー S は, (1) で与えられる. 正準集合は小正準集合に対して (2) のやり取りを許した集合である. ヘルムホルツの自由エネルギー F は正準集合の分配関数 Z_N を用いて, $F =$ (3) で与えられる. 大正準集合は正準集合に対して, さらに (4) のやり取りを許した集合である. 熱力学第 3 法則によれば, 絶対零度でのエントロピーは (5) である.

- (ア) $k \log W$ (イ) $kT \log W$ (ウ) $-k \log W$ (エ) $-kT \log W$ (オ) 体積 (カ) エネルギー (キ) 粒子
(ク) $k \log Z_N$ (ケ) $kT \log Z_N$ (コ) $-k \log Z_N$ (サ) $-kT \log Z_N$ (シ) 0 (ス) 1 (セ) ∞

[問題 2] 体積 V_0 の微小な立方体 N 個からなる空間に n 個の原子が存在する場合を考える (右図は 2 次元で $N = 121$, $n = 7$ の場合の例). 全系の体積 V は $V_0 N$ であり, $N \gg n \gg 1$ とする. それぞれの立方体は十分小さく, その中に存在する原子数は 0 個か 1 個とする. 各原子は区別できないとし, 原子間に相互作用はないものとする. この時,



- (1) n 個の原子が N 個のサイトに分布する場合の数 W を求めよ.
- (2) $N, n \gg 1$ として, (1) の結果とスターリングの公式から, この系のエントロピー S を求めよ.
(スターリングの公式: $\log N! \simeq N \log N - N$, ($N \gg 1$))
- (3) ヘルムホルツの自由エネルギー F ($= -TS$) を求めよ.
- (4) $N \gg n$ の場合に, 熱力学関係式 $\frac{\partial F}{\partial V} = -p$ を用いてこの系の圧力 p を求めよ. ただし $\frac{n}{N}$ の 2 次以上の項は無視する.
(ヒント: この場合, $\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{\partial F}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial V}$ が成り立つ. また, 近似式 $\log(1+x) \simeq x - \frac{1}{2}x^2$ ($x \ll 1$) を用いよ.)
- (5) (4) の結果の物理的意味を述べよ.

[問題 3] 量子数 ℓ で指定される状態のエネルギー準位を ε_ℓ とすると, 正準集合の分配関数 Z_N は, $Z_N = \sum_{\ell} e^{-\beta \varepsilon_\ell}$ で与えられる. また, 量子数 ℓ で指定される状態をとる確率 p_ℓ は, $p_\ell = e^{-\beta \varepsilon_\ell} / Z_N$ で与えられる. 以下の問いに答えよ.

- (1) エネルギーの平均値 $\langle E \rangle$ を ε_ℓ , β , Z_N を用いて表せ.
- (2) (1) の結果からエネルギーの平均値は, $\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_N = -\frac{1}{Z_N} \frac{\partial}{\partial \beta} Z_N$ で計算できることを示せ.
- (3) エネルギーの 2 乗の平均値 $\langle E^2 \rangle$ を ε_ℓ , β , Z_N を用いて表せ.
- (4) 比熱 $C = \frac{\partial}{\partial T} \langle E \rangle = \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \beta} \langle E \rangle$ を計算し, エネルギーの揺らぎの平均値 $\Delta E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ が $kT^2 C$ で与えられることを示せ.

[問題4] 1 粒子がとれる量子状態 k に対応したエネルギー準位を ϵ_k , その準位を占める粒子数を n_k とすると全粒子数は,

$$N = \sum_k n_k \quad (\text{式 1})$$

で与えられる。この時, 大正準集合の分配関数 Ξ は, 化学ポテンシャル μ を用いて,

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta N \mu} Z_N = \prod_k \sum_{n_k=0}^M e^{\beta(\mu - \epsilon_k)n_k} \quad (\text{式 2})$$

で与えられる。ここで M は 1 つの準位に入りうる最大の粒子数である。これ以降はフェルミ粒子について考えることにする。以下の問いに答えよ。

- (1) フェルミ粒子の場合, 1 つの準位に入りうる最大の粒子数 M はいくつか答えよ。
- (2) (1) の事実と (式 2) からフェルミ粒子の場合の分配関数を計算せよ。答えのみは不可。
- (3) 平均の粒子数 $\bar{N}$ は $\bar{N} = kT \frac{\partial}{\partial \mu} \log \Xi$ で与えられることから, 平均の粒子数を計算せよ。答えのみは不可。
- (4) (3) の結果を (式 1) と比較することで, k 番目の準位の平均の占有粒子数 $\bar{n}_k$ を求めよ。これをフェルミ分布関数と呼ぶ。
- (5) ϵ_k を連続変数と見た時, (4) で求めたフェルミ分布関数の絶対零度と有限温度でのグラフの概形を描け。
- (6) (5) で描いた絶対零度でのフェルミ分布関数の物理的な意味を説明せよ。