平成２８年度・統計力学試験問題

［1］ N 個の粒子が，右図のようにそれぞれ独立にエネルギー 0 か ε の状態を取りうる２準位系について，小正準集合の方法を適用することを考える．以下の問いに答えなさい．

(1) 全エネルギーが $E = n\varepsilon$ で与えられる時の微視的な状態の数 W_n を求めなさい．

(2) このときのエントロピー S を求めなさい．
（ヒント： 必要であれば，スターリングの公式：$\log x! \cong x\log x - x$ を用いよ．）

(3) 統計力学的温度の定義 $\left(\dfrac{\partial S}{\partial E}\right) = \dfrac{1}{T}$ を用いて，エネルギー E を温度の関数として求めよ．
（ヒント： 今の場合，$\dfrac{\partial}{\partial E} = \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial n}$ である．）

(4) 絶対零度の極限（$T \to 0$）でのエネルギー E の値を求め，その物理的意味を説明しなさい．

(5) 高温の極限（$T \to \infty$）でのエネルギー E の値を求め，その物理的意味を説明しなさい．

［2］周波数 ω で振動する１次元の調和振動子 N 個から成る系がボルツマン統計に従っているとして，全系のエネルギー E と温度 T の関係を導くことを考える．量子論的には１つの１次元調和振動子のとれる固有状態のエネルギー ε_m は $\varepsilon_m = \left(\dfrac{1}{2} + m\right)\hbar\omega$（$m = 0$, 1, 2, . . .）で与えられる．この時，

(1) ボルツマンの１粒子分配関数を求めよ．

(2) 全系の平均のエネルギー E を求めよ．

(3) この系の比熱をもとめよ．

(4) 十分高温では比熱はどうなるか述べよ．

［3］フェルミ分布関数は，$f(E) = \dfrac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$ で与えられる．温度が十分低い（$T \ll \mu/k_B$）有限温度であるとき，適当な関数 $g(E)$ とフェルミ分布関数の積の積分は，

$$\int_0^\infty g(E)f(E)dE \cong \int_0^\mu g(E)dE + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2 g'(\mu)$$

と近似できる．これをゾンマーフェルト展開と呼ぶ．以下の問いに答えなさい．

(1) 絶対零度と，$T \ll \mu/k_B$ を満たす有限温度でのフェルミ分布関数の概形をそれぞれ描きなさい．

(2) 絶対零度での化学ポテンシャルを，特にフェルミ・エネルギーと呼ぶ．全粒子数を N とし，状態密度を $n(E)$ とすると，フェルミ・エネルギー E_F はどのように定義されるか式

を用いて説明せよ．

以下では，状態密度 $n(E)$ が

$$n(E) = \begin{cases} D\ (\text{定数}) & :\ (E \geq 0) \\ 0 & :\ (E < 0) \end{cases}$$

で与えられる電子系について考える．以下の問いに答えなさい．

(3) 恒等式 $N = \int_0^\infty n(E)f(E)dE$ に対してゾンマーフェルト展開を適用することで，この系では $T << \mu/k_B$ で μ は温度に依存せず $\mu \cong E_F$ となることを示せ．

（ヒント：ゾンマーフェルト展開において $\int_0^\mu g(E)dE = \int_0^{E_F} g(E)dE + \int_{E_F}^\mu g(E)dE$ ）と積分区間を分割して考える）

(4) 全系のエネルギー U は $U(T) = \int_0^\infty En(E)f(E)dE$ で与えられる．これに対してゾンマーフェルト展開を行い，$T << \mu/k_B$ を満たす低温でこの系の電子比熱 C が $C = \dfrac{\pi^2 k_B^2 D}{3}T$ で与えられることを示せ．