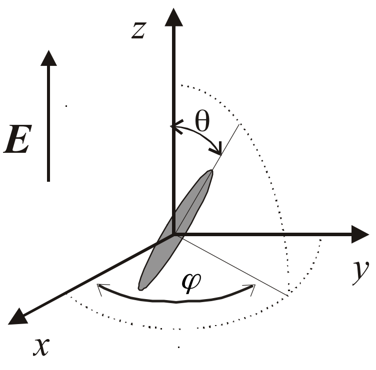
平成２７年度　統計力学期末試験問題

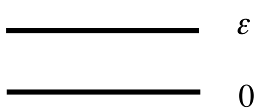


[問題１] 双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ を持つ分子を一様な電場 $\boldsymbol{E}$ の中に置いたとき，電場の方向を z 軸とする球座標を用いると（右図参照），そのエネルギーは $U(\theta) = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} = -pE\cos\theta$ で与えられる. 以下の問いに答えなさい.

(1) この系の１粒子分配関数は，$Z_1 = \int e^{-\beta U(\theta)} d\Omega$ で与えられることから１粒子分配関数を計算しなさい．ここで $d\Omega$ は，$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$，$0 \le \theta \le \pi$，$0 \le \varphi \le 2\pi$ を満たす立体角である.（ヒント：$\cos\theta = t$ とおく.）

(2) $\langle U \rangle = -\dfrac{1}{Z_1}\dfrac{\partial Z_1}{\partial \beta}$ により温度 T での平均のエネルギーを計算しなさい.

(3) 絶対零度の極限での平均のエネルギーを求めなさい．またその物理的意味を分子の向きも含めて答えなさい.



[問題２] 右図のように，N 個の粒子がそれぞれ独立にエネルギー０の状態と ε の状態をとれる２準位系を考える．以下の問いに答えなさい.

(1) 全系のエネルギー E が $n\varepsilon$ となる場合の数 W_n を求めなさい.

(2) (1)の時のエントロピーをスターリングの公式 $\log x! \cong x\log x - x$ を用いて求めなさい.

(3) この２準位系におけるボルツマンの１粒子の分配関数 Z_1 を求めなさい.

(4) (1)で求めた場合の数 W_n を用いると，正準集合の分配関数が $Z_N = \sum_{n=0}^{N} W_n e^{-\beta n\varepsilon}$ で与えられることから

Z_N を計算し，$Z_N = (Z_1)^N$ となることを示しなさい.

（ヒント：２項定理　$(a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} {}_N C_n a^{N-n} b^n$　を用いる.）

[問題３] 量子数lで指定される状態のエネルギー準位をε_l，その準位を占める粒子数をn_lとすると全粒子数は，

$$N = \sum_l n_l \tag{式 1}$$

で与えられる．この時，大正準集合の分配関数は，化学ポテンシャルμを用いて，

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta N\mu} Z_N = \prod_l \sum_{n_l=0}^{M} e^{\beta(\mu-\varepsilon_l)n_l} \tag{式 2}$$

で与えられる．ここでMは１つの準位に入りうる最大の粒子数である．これ以降はフェルミ粒子について考えることにする．以下の問いに答えなさい．

(1) フェルミ粒子の場合，１つの準位に入りうる最大の粒子数Mはいくつか答えなさい．

(2) (1)の結果と(式２)からフェルミ粒子の場合の分配関数を計算しなさい．答えのみは不可．

(3) 平均の粒子数$\overline{N}$は$\overline{N} = kT\dfrac{\partial}{\partial\mu}\log\Xi$で与えられることから，平均の粒子数を計算しなさい．答えのみは不可．

(4) (3)の結果を(式 1)と比較することで，l番目の準位の平均の占有粒子数$\overline{n}_l$を求めなさい．これをフェルミ分布関数と呼ぶ．

(5) (4)で求めたフェルミ分布関数の絶対零度と有限温度でのグラフの概形を書きなさい．

(6) (5)で描いた絶対零度でのフェルミ分布関数の物理的な意味を説明しなさい．