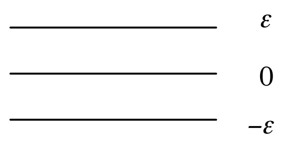
平成２６年度　統計力学期末試験問題

[問題１]　N 個の粒子がそれぞれ独立に右図のような 3 つのエネルギー準位（-ε，0，ε ）をとれる 3 準位系をボルツマンの方法で考える．以下の問いに答えなさい．



(1) 1 粒子の分配関数 Z_1 を求めなさい．

(2) N 粒子のエネルギーの平均値 $< E >$ を計算しなさい．

(3) 低温の極限($T \to 0$)でエネルギーの平均値 $< E >$ はどのような値をとるか示し，その物理的意味を答えなさい．

(4) 高温の極限($T \to \infty$)でエネルギーの平均値 $< E >$ はどのような値をとるか示し，その物理的意味を答えなさい．

[問題２] 量子数 l で指定される状態のエネルギー準位を ε_l とすると，正準集合の分配関数 Z_N は，$Z_N = \sum_l e^{-\beta\varepsilon_l}$ で与えられる．また，量子数 l で指定される状態をとる確率は，$e^{-\beta\varepsilon_l}/Z_N$ で与えられる．

以下の問に答えなさい．

(1) エネルギーの平均値 $< E >$ の表式を ε_l， β， Z_N を用いて表しなさい．

(2) (1)の結果からエネルギーの平均値は，$< E > = -\dfrac{\partial}{\partial\beta}\log Z_N = -\dfrac{1}{Z_N}\dfrac{\partial}{\partial\beta}Z_N$ で計算できることを示しなさい．

(3) エネルギーのゆらぎの平均値，$\Delta E^2 = < E^2 > - < E >^2$ の表式を ε_l，β，Z_N を用いて表しなさい．

(4) 比熱 $C = \dfrac{\partial}{\partial T} < E > = \dfrac{\partial\beta}{\partial T}\dfrac{\partial}{\partial\beta} < E >$ を計算し，エネルギーの揺らぎの平均値 ΔE^2 が $k_B T^2 C$ で与えられることを示しなさい．但し，k_B はボルツマン定数である．

[問題３] 量子数lで指定される状態のエネルギー準位をε_l，その準位を占める粒子数をn_lとすると全粒子数は，

$$N=\sum_l n_l \tag{式 1}$$

で与えられる．この時，大正準集合の分配関数は，化学ポテンシャルμを用いて，

$$\Xi=\sum_{N=0}^{\infty}e^{\beta N\mu}Z_N=\prod_l\sum_{n_l=0}^{M}e^{\beta(\mu-\varepsilon_l)n_l} \tag{式 2}$$

で与えられる．ここでMは１つの準位に入りうる最大の粒子数である．これ以降はボーズ粒子について考えることにする．以下の問いに答えなさい．

(1) ボーズ粒子の場合，１つの準位に入りうる最大の粒子数Mはいくつか答えなさい．

(2) (1)の結果と(式２)からボーズ粒子の場合の分配関数を計算しなさい．答えのみは不可．

(3) 平均の粒子数$\overline{N}$は$\overline{N}=kT\dfrac{\partial}{\partial\mu}\log\Xi$で与えられることから，平均の粒子数を計算しなさい．答えのみは不可．

(4) (3)の結果を(式 1)と比較することで，l番目の準位の平均の占有粒子数$\overline{n}_l$を求めなさい．これをボーズ分布関数と呼ぶ．

(5) (4)で求めたボーズ分布関数の絶対零度と有限温度でのグラフの概形を書きなさい．

(6) (5)で描いた絶対零度でのボーズ分布関数の物理的な意味を説明しなさい．