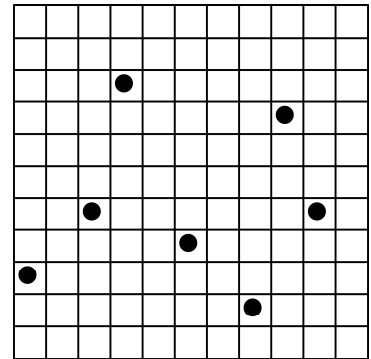


[問題 1] 体積 V_0 の微小な立方体 N 個からなる空間に n 個の原子が存在する場合考える (右図は 2 次元で $N=121$, $n=7$ の場合の例). 全系の体積 V は $V_0 N$ であり, $N \gg n \gg 1$ とする. それぞれの立方体は十分小さく, その中に存在する原子数は 0 個か 1 個とする. 各原子は区別できないとし, 原子間に相互作用はないものとする. この時,



- (1) n 個の原子が N 個のサイトに分布する場合の数 W を求めよ.
- (2) N , $n \gg 1$ として, (1)の結果からこの系のエントロピー S を求めよ,
(ヒント: Stirling の公式 $\log N! \cong N \log N - N$ ($N \gg 1$))
- (3) ヘルムホルツの自由エネルギー $F (= -TS)$ を求めよ.
- (4) $N \gg n$ の場合に, 熱力学関係式 $\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right) = -p$ を用いてこの系の圧力を求めよ. ただし $\frac{n}{N}$ の 2 次以上

の項は無視する.

(ヒント: この場合, $\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{\partial F}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial V}$ が成り立つ. $\log(1+x) \cong x - \frac{1}{2}x^2$ ($x \ll 1$).)

- (5) (4)の結果の物理的意味を述べよ.

[問題 2] 右図のように N 個の粒子がそれぞれ独立にエネルギー 0 か ε の状態を
とりうる 2 準位系をボルツマンの方法で考える. 以下の問いに答えなさい.

- (1) ボルツマンの 1 粒子分配関数 Z_1 を求めなさい.
- (2) この系のエネルギーの平均値 $\langle E \rangle$ を求めなさい.
- (3) 低温の極限 ($T \rightarrow 0$) でエネルギーの平均値 $\langle E \rangle$ はどのような値をとるか, またその物理的意味を答えなさい.
- (4) 高温の極限 ($T \rightarrow \infty$) でエネルギーの平均値 $\langle E \rangle$ はどのような値をとるか, またその物理的意味を答えなさい.

[問題 3] 2 次元自由電子の波動関数は, 1 辺が L の正方形で周期境界条件を置くと,

$\varphi(x, y) = \frac{1}{L} \exp[i(k_x x + k_y y)]$ で与えられる. ただし波数 k_x, k_y は, $k_x = \frac{2\pi}{L} n_x$, ($n_x = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$),

$k_y = \frac{2\pi}{L} n_y$, ($n_y = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$) といった飛び飛びの値を取り, そのときのエネルギーは,

$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2)$ で与えられる. このとき以下の問いに答えなさい.

- (1) $0 \leq \varepsilon \leq E$ を満たす状態数 $\Omega_0(E)$ が $\frac{mL^2 E}{\pi \hbar^2}$ で与えられることを示せ.

(ヒント: スピンの自由度を考慮すること)

- (2) 状態密度 $n(E) = \frac{d\Omega_0(E)}{dE}$ を求めよ.

(3) フェルミ分布関数は、 $f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$ で与えられる。絶対零度でのフェルミ分布関数の概形を描け。

(4) 有限温度であるが、 $0 < T \ll \mu/k_B$ を満たす低温でのフェルミ分布関数の概形を描け。

(5) (1)で考えた系の電子数を N とすると、化学ポテンシャル $\mu(T)$ は、

$$N = \int_0^\infty f(E)n(E)dE \quad \text{①}$$

を満たすように決められる。絶対零度での化学ポテンシャル $\mu(0) = E_F$ を求めよ。これをフェルミエネルギーと呼ぶ。

(ヒント：絶対零度で①の積分はどのようなになるか考えよ。)

(6) $0 < T \ll \mu/k_B$ を満たす低温では、適当な関数 $g(E)$ とフェルミ分布関数 $f(E)$ の積の積分は次式で近似できる。

$$\int_0^\infty f(E)g(E)dE \cong \int_0^\mu g(E)dE + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 g'(\mu) \quad \text{②}$$

これをゾンマーフェルト展開と呼ぶ。②式を①式に適用することで、2次元自由電子系では $0 < T \ll \mu/k_B$ を満たす低温で化学ポテンシャルは温度によらずほとんど一定であることを示せ。

(ヒント： $\int_0^\mu g(E)dE = \int_0^{E_F} g(E)dE + \int_{E_F}^\mu g(E)dE$ と積分区間を分けて考える。)