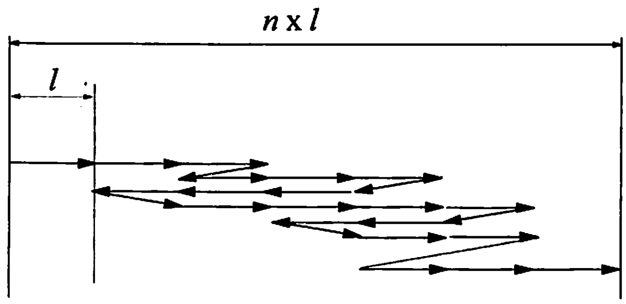
平成２３年度 統計力学試験問題



[問題１] 長さlの細い針金N個からなる鎖が右図のように１次元的に連なっている場合を考える．針金の太さは考えず，結合部は自由に曲がるとする．この時，以下の問いに答えよ．

１）鎖の全長は針金の長さlの整数倍になる．いま鎖の長さ L を$n\times l$（n は整数)に固定したときに針金の並び方の場合の数 W_n は $\dfrac{N!}{\left(\dfrac{N+n}{2}\right)!\left(\dfrac{N-n}{2}\right)!}$ で与えられることを示せ．

２）Stirlingの公式を用いて，この系のエントロピーを計算せよ．
（ヒント： Stirlingの公式 $\log x! \cong x\log x - x$）

３）この鎖の張力fは，ヘルムホルツの自由エネルギーF（$=-TS$）を用いて，$f=\dfrac{\partial F}{\partial L}$により求まる．
張力fを求めよ．（ヒント）$\dfrac{\partial}{\partial L}=\dfrac{1}{l}\dfrac{\partial}{\partial n}$

４）$n \ll N$のとき，張力fはLに比例することを示せ．
（ヒント）$x \ll 1$の時，$\log\dfrac{1+x}{1-x}=2x+\dfrac{2}{3}x^3+\cdots$

[問題２] 相互作用のない粒子がそれぞれ，$\varepsilon_l = l\varepsilon\ (l=0,1,2,3,\cdots)$で与えられる飛び飛びのエネルギー準位をとる系をボルツマンの方法で考える．以下の問いに答えなさい．

(1) １粒子のボルツマンの分配関数$Z_1=\sum_l \exp[-\beta\varepsilon_l]$を求めなさい．

（ヒント）$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1+x+x^2+x^3+\cdots = \dfrac{1}{1-x}$

(2) １粒子の平均のエネルギー$\langle E \rangle$を求めなさい．

(3) $\langle E \rangle$の絶対零度での値を求めなさい．

(4) 高温では，$\langle E \rangle \cong -\varepsilon/2 + k_B T$と成ることを示しなさい．

（ヒント：$\coth x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \cong \dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^3}{45}+\cdots$）

(5) $\langle E \rangle$を温度の関数としてプロットしたグラフの概形を書きなさい．

[問題 3] フェルミ分布関数は，$f(E)=\dfrac{1}{e^{\beta(E-\mu)}+1}$ で与えられる．温度が十分低い($T<<\mu/k_B$)有限温度であるとき，適当な関数 $g(E)$ とフェルミ分布関数の積の積分は，

$$\int_0^\infty g(E)f(E)dE \cong \int_0^\mu g(E)dE+\frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2 g'(\mu)$$

と近似できる．これをゾンマーフェルト展開と呼ぶ．以下の問いに答えなさい．

(1) 絶対零度と，$T<<\mu/k_B$ を満たす有限温度でのフェルミ分布関数の概形をそれぞれ描きなさい．

(2) 絶対零度での化学ポテンシャルを，特にフェルミ・エネルギーと呼ぶ．全粒子数を N とし，状態密度を $n(E)$ とすると，フェルミ・エネルギー E_F はどのように定義されるか式を用いて説明せよ．

以下では，状態密度 $n(E)$ が

$$n(E)=\begin{cases} D\ (\text{定数}) & :(E\geq 0) \\ 0 & :(E<0) \end{cases}$$

で与えられる電子系について考える．以下の問いに答えなさい．

(3) 恒等式 $N=\int_0^\infty n(E)f(E)dE$ に対してゾンマーフェルト展開を適用することで，この系では $T<<\mu/k_B$ で μ は温度に依存せず $\mu\cong E_F$ となることを示せ．

(ヒント:ゾンマーフェルト展開において $\int_0^\mu g(E)dE=\int_0^{E_F} g(E)dE+\int_{E_F}^\mu g(E)dE$)と積分区間を分割して考える)

(4) 全系のエネルギー U は $U(T)=\int_0^\infty En(E)f(E)dE$ で与えられる．これに対してゾンマーフェルト展開を行い，$T<<\mu/k_B$ を満たす低温でこの系の電子比熱 C が $C=\dfrac{\pi^2k_B^2D}{3}T$ で与えられることを示せ．必要であれば，絶対零度での全エネルギーを $U(0)$ とせよ．

(ヒント：(3)のヒントを用いる)