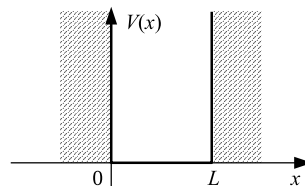


[1] 1次元でポテンシャルが

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & L < x \end{cases}$$

で与えられる時、以下の問いに答えよ。



- (1) Schrödinger 方程式 $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right] \phi(x) = E\phi(x)$, $E \geq 0$ の一般解が $0 \leq x \leq L$ で $\phi(x) = A \sin kx + B \cos kx$ とかけることを示せ.
- (2) (1) の時, k とエネルギー E の関係を示せ.
- (3) (1) の Schrödinger 方程式の解 $\phi(x)$ の境界条件を示せ.
- (4) (3) から k の取り得る値を求め, (1) の Schrödinger 方程式の解を求めよ. 規格化はしなくて良い.
- (5) エネルギーが最も低い状態の波動関数を規格化定数も含めて求め, その時の存在確率を横軸を x 座標に取り図示せよ.

[2] 1次元系でポテンシャルがデルタ関数により, $V(x) = U_0 \delta(x)$, $U_0 > 0$ で与えられる時, Schrödinger 方程式は, $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + U_0 \delta(x) \phi(x) = E\phi(x)$ となる. 正のエネルギー ($E > 0$) を持つ波が x 軸の負の方向から入射するとき以下の問いに答えよ.

- (1) 区間 $(-\infty, 0)$ での波動関数が $\phi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ となることを示せ.
- (2) 区間 $(0, \infty)$ での波動関数が $\phi_2(x) = Ce^{ikx}$ となることを示せ.
- (3) 波動関数が原点で連続である条件から, $A + B = C$ の関係があることを示せ.
- (4) 上記の Schrödinger 方程式の両辺を微小区間 $(-\epsilon < x < \epsilon)$ で積分し, $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ることで波動関数の微分の原点での接続条件が $\phi_2'(0) - \phi_1'(0) = \frac{2mU_0}{\hbar^2} \phi(0)$ となることを示せ.
- (5) $\gamma = \frac{2mU_0}{\hbar^2}$ とすると, (4) の接続条件から, $(\gamma + ik)A + (\gamma - ik)B = ikC$ の関係があることを示せ.
- (6) (3) と (5) の式から C を消去して, 反射率 $R = \left|\frac{B}{A}\right|^2$ を求めよ.

[3] 調和振動子の無次元化した座標 q と運動量 p は交換関係 $[q, p] = i$ を満たす. また, これらの線型結合により昇降演算子は $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$ で定義され, 波動関数 u_n に対して, $a^\dagger u_n = \sqrt{n+1}u_{n+1}$, $au_n = \sqrt{n}u_{n-1}$ という作用を持つ. 以下の問いに答えよ. ただし, $(u_n, u_m) = \delta_{nm}$ とする.

- (1) 交換関係 $[a, a^\dagger] = 1$ を q と p の交換関係から示せ.
- (2) 無次元化した Hamiltonian である $\mathcal{H} = \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2$ が, 昇降演算子を用いて $\mathcal{H} = a^\dagger a + \frac{1}{2}$ とかけることを示せ.
- (3) 昇降演算子の定義と性質のみから, 基底状態での位置座標の平均値 $\langle q \rangle = (u_0, qu_0)$ と位置座標の自乗の平均値 $\langle q^2 \rangle = (u_0, q^2 u_0)$ を求めよ.
- (4) 昇降演算子の定義と性質のみから, 基底状態での運動量の平均値 $\langle p \rangle = (u_0, pu_0)$ と運動量の自乗の平均値 $\langle p^2 \rangle = (u_0, p^2 u_0)$ を求めよ.
- (5) $\Delta q \Delta p = \sqrt{\langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle} \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle}$ の値を求めよ.