

令和4年度版

物理数学II

目次

1	複素数と複素平面	1
1.1	複素数の定義	1
1.2	複素平面と極表示	1
1.3	複素数の四則演算と幾何学的意味	2
2	複素関数の性質	4
2.1	複素関数の定義	4
2.2	複素関数の連続性	4
2.3	微分可能性と導関数	4
2.4	正則性とコーシー・リーマンの関係式	5
2.5	初等複素関数	6

1 複素数と複素平面

1.1 複素数の定義

虚数単位 i を

$$i^2 = -1 \quad (1.1)$$

により導入し, 2つの実数の組み $\{x, y\}$ により,

$$z = x + iy \quad (1.2)$$

と表現される数を複素数という. この時, x を実部 (real part), y を虚部 (imaginary part) と呼び, それぞれ,

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z \quad (1.3)$$

と表す. $z = x + iy$ に対して, $x - iy$ を z の複素共役と呼び, $\bar{z}$ (数学の表現) または z^* (物理の表現) で表す. このテキストでは数学に倣って, $\bar{z}$ と表すことにする. 即ち,

$$\bar{z} = x - iy \quad (1.4)$$

(1.2) と (1.4) から,

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z - \bar{z}) \quad (1.5)$$

がすぐわかる. また, 同じ理由で,

$$z = \bar{\bar{z}} \quad (1.6)$$

のとき, z は実数 ($y = 0$) であることがわかる.

複素数の絶対値は,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}, \quad |z|^2 = z\bar{z} \quad (1.7)$$

により定義する. $|z|^2 = z^2$ ではないので注意すること!

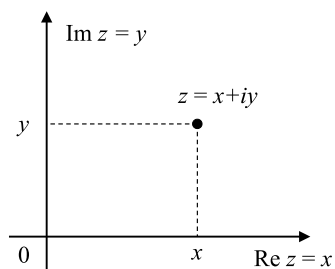
[例題 1.1] $z = 1 + i$ とするとき,

- (1) 複素共役 $\bar{z}$ を求めよ.
- (2) 絶対値 $|z|$ を求めよ.

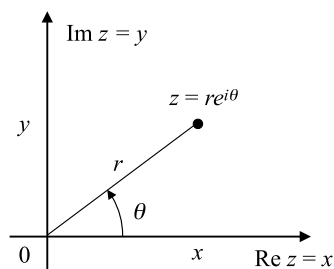
1.2 複素平面と極表示

複素数 $z = x + iy$ の実部 (x) を横軸 (実軸と呼ぶ) にとり, 虚部 (y) を縦軸 (虚軸と呼ぶ) にとった平面を複素平面と呼ぶ. この時複素数は複素平面上の 1 点として表せる (下図 (a)). この z を極座標の時と同じように原点からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ と実軸から反時計回りに測った角度 θ (偏角と呼ぶ) を用いて

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.8)$$



(a)



(b)

と表すやり方を極表示と言う (下図 (b)). 複素数の絶対値は複素平面における原点からの距離であることがわかる. z の偏角を $\arg z$ とかく. 即ち,

$$\theta = \arg z \quad (1.9)$$

オイラーの公式,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.10)$$

を用いると, (1.8) は,

$$z = re^{i\theta} \quad (1.11)$$

とかける. 偏角 θ には 2π の整数倍の不定性があることに注意しよう. 即ち,

$$e^{i2\pi n} = 1, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.12)$$

の関係により,

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi n)}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.13)$$

となる. これが後に複素関数の多価性を生む原因になる.

[例題 1.2] $z = 1 + i$ とするとき, 極表示を (1.11) 式の形で求めよ.

1.3 複素数の四則演算と幾何学的意味

1.3.1 加法と減法

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ とすると, 加法 ($z_1 + z_2$) と減法 ($z_1 - z_2$) は,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (1.14)$$

で定義する. これは複素平面で見るとベクトルの和と差に対応する.

1.3.2 乗法と除法

乗法 ($z_1 z_2$) は,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \quad (1.15)$$

で定義する. $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ として極表示で表すと,

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (1.16)$$

となる. 複素平面上で見ると, z_1 のベクトルを r_2 倍して θ_2 回転することに対応する. 除法 (z_1/z_2) は,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (1.17)$$

で定義する. 極表示で表すと,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.18)$$

となり, 複素平面で見ると z_1 を r_2 で割って時計回りに θ_2 回転することに対応する.

[例題 1.3] $z_1 = 1 + i2$, $z_2 = 2 - i3$ とするとき,

- (1) $z_1 + z_2$ を求めよ.
- (2) $z_1 z_2$ を求めよ.
- (3) z_1/z_2 を求めよ.

2 複素関数の性質

2.1 複素関数の定義

複素数 $z = x + iy$ に対して別の複素数 $w = f(z) = u + iv$ を対応させる写像を複素関数と呼ぶ。この時 u と v は、それぞれ x と y の関数である。即ち、

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2.1)$$

と書ける。1つの z に対して、 $f(z)$ が1つの w に対応するとき1価関数、2つ以上の w に対応する時、多価関数と呼ぶ。

多価関数の例

$w = f(z) = z^{1/2}$ において、 z を極表示で $z = x + iy = re^{i\theta}$ とすると、 θ は 2π の整数倍の不定性があるので、 $z = re^{i(\theta+2n\pi)}$ と書ける。ここで n は任意の整数である。すると、

$$w = \sqrt{z} = \{re^{i(\theta+2n\pi)}\}^{1/2} = r^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}e^{in\pi} = \pm r^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad (2.2)$$

となり2価関数となる。

2.2 複素関数の連続性

定義域内の点 $z_0 = z - h$ において、

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{h \rightarrow 0} f(z_0 + h) = f(z_0) \quad (2.3)$$

を満たすとき、 $f(z_0)$ は z_0 で連続であるという。 z がどの方向から z_0 に近づいても、即ち h がどの方向から 0 に近づいても (2.3) 式が成り立つことが重要である。

2.3 微分可能性と導関数

定義域内の点 $z_0 = z - h$ に対して有限な極限

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (2.4)$$

が存在するとき、 $f(z)$ は z_0 で微分可能であると言い、 $f'(z_0)$ を $z = z_0$ における微分係数と呼ぶ。このとき、 z はどの方向から z_0 に近づいても、即ち h がどの方向から 0 に近づいても、同じ極限に近づかないといけないことが重要である。

[例題 2.1] $f(z) = \bar{z}$ が $z = 0$ で微分不可能なことを示せ。

定義域内の点全ての点 z で微分可能なときは、その微分係数 $f'(z)$ も z の関数となる。即ち、

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (2.5)$$

このとき、 $f'(z)$ を $f(z)$ の導関数と呼ぶ。 $f(z)$ から $f'(z)$ を求めることを微分すると言い、

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (2.6)$$

と書くこともある．(2.5) 式から，

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(z+h) - f(z) = \lim_{h \rightarrow 0} f'(z)h = 0 \quad (2.7)$$

となるので，微分可能な関数は連続な関数である．

2.4 正則性とコーシー・リーマンの関係式

2.4.1 コーシー・リーマンの関係式

複素関数 $f(z)$ が点 z_0 と，その近傍（どんなに小さな近傍でも良い）内の点 z で微分可能なとき， $f(z)$ は $z = z_0$ で正則であるという．領域 D で定義された $z = x + iy$ の複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が領域 D において正則であるための必要十分条件は，領域 D において $u(x, y)$ ， $v(x, y)$ が全微分可能でコーシー・リーマン (Cauchy-Riemann) の関係式，

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = u_x(x, y) = v_y(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = u_y(x, y) = -v_x(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (2.8)$$

を満足することである．

(講義中で証明)

2.4.2 コーシー・リーマンの関係式の別の表現

$f(z)$ は一般に， z と $\bar{z}$ の関数である．そこで， $f(z)$ を z と $\bar{z}$ の関数として見た時の表式を $F(z, \bar{z})$ とする． $f(z)$ の原始関数では無いことに注意．このとき，コーシー・リーマンの関係式の別の表現として，

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.9)$$

が成り立つ．これは，複素関数 $f(z) = F(z, \bar{z})$ が正則であるとき， F は $\bar{z} = x - iy$ に依存せず， $z = x + iy$ のみの関数になることを示している．

(講義中で証明)

[例題 2.2] $f(z) = z + \bar{z}$ が $z = 0$ で正則ではないことを示せ．

2.4.3 調和関数

コーシー・リーマンの関係式 (2.8) を偏微分すると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.10)$$

となる．従ってラプラス演算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を用いると， $u(x, y)$ ， $v(x, y)$ はラプラスの微分方程式，

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad \Delta v(x, y) = 0 \quad (2.11)$$

を満たすことが分かる．式 (2.11) を満たす関数を調和関数と呼ぶ． u に対して，式 (2.8) を満たす v を共役調和関数と呼ぶ．

2.4.4 逆関数の存在と正則性

$f(z)$ が $z = z_0$ で正則で， $f'(z_0) \neq 0$ であるとき， $z = z_0$ の近傍で $w = f(z)$ の逆関数 $z = f^{-1}(w)$ が存在し，

$$\frac{dz}{dw} = \frac{df^{-1}(w)}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{f'(z)} \quad (2.12)$$

が成り立つ．

(証明は講義中で行う)

2.5 初等複素関数

2.5.1 多項式

z の冪の有限項の線形結合でかける関数，

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (2.13)$$

を z の多項式という．多項式は微分可能で z のみの関数なので正則な関数である．

2.5.2 有理関数

m 次と n 次 ($m < n$) の多項式 $q_m(z)$ と $p_n(z)$ の商

$$f(z) = \frac{q_m(z)}{p_n(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \quad (2.14)$$

で与えられる関数を有理関数と呼ぶ．分母が 0 とならない全ての点で微分可能なので正則である．分母が 0 となる点では微分が出来ないので特異点 (singular point) となる．特異点については後の章で勉強する．

2.5.3 指数関数

実関数 e^x の $x = 0$ でのテイラー展開 (マクローリン展開) で x を複素数 z に拡張することで複素変数の指数関数，

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad (2.15)$$

を定義する．複素関数のテイラー展開は後の章で議論する．指数関数 e^z は $z = x + iy$ を用いて，

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (2.16)$$

により定義することもできる．この定義から， e^z は $2n\pi i$ (n は整数) の周期を持つことがわかる．即ち，

$$e^{z+2n\pi i} = e^z e^{2n\pi i} = e^z \quad (2.17)$$

[問題 2.1] 式 (2.16) で定義した指数関数がコーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ．

2.5.4 3 角関数

オイラーの公式 (1.10) より実数 x に対して,