平成 30 年度 物理数学 I 期末試験問題

[1] 以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx}e^{inx}dx = 2\pi\delta_{nm}$ となることを示せ．

(2) 区間 $[-\pi,\pi]$ で定義される周期 2π の関数 $f(x)$ が，$f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ とフーリエ級数展開できるとき，係数 C_m は，$C_m = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx$ で与えられることを示せ．

(3) $f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \le x < 0) \\ 1 & (0 \le x < \pi) \end{cases}$ とするとき，この関数の概形を描け．

(4) (3) の関数を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ の形にフーリエ級数展開せよ．

[2] エルミート多項式 $H_n(x)$ は，区間 $[-\infty,\infty]$ で重み関数 $w(x) = e^{-x^2}$ とロドリーグの公式を用いて，
$H_n(x) = (-1)^n \dfrac{1}{w(x)} D^n[w(x)]$ で与えられる．ここで，$D = \dfrac{d}{dx}$ である．
また，漸化式 $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ を満たす．以下の問いに答えよ．

(1) ロドリーグの公式より，$H_0(x)$，$H_1(x)$ の具体的な表式を求めよ．

(2) 漸化式より，$H_2(x)$，$H_3(x)$ の具体的な表式を求めよ．

(3) $H_0(x)$ と $H_2(x)$ が直交することを示せ．

[3] ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ はロドリーグの公式により，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} D^n[(x^2-1)^n]$ で与えられる．以下の問いの答えよ．ライプニッツの公式 $D^n[f(x)g(x)] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k D^k[f(x)] D^{n-k}[g(x)]$ は既知として良い．

(1) $D^{n+1}[(x^2-1)^{n+1}] = (x^2-1)D^{n+1}[(x^2-1)^n] + 2(n+1)xD^n[(x^2-1)^n] + n(n+1)D^{n-1}[(x^2-1)^n]$ となることを示せ．(ヒント：$D^{n+1}[(x^2-1)^{n+1}] = D^{n+1}[(x^2-1)(x^2-1)^n]$ としてライプニッツの公式を適用する．)

(2) $D^{n+1}[(x^2-1)^{n+1}] = 2(n+1)xD^n[(x^2-1)^n] + 2n(n+1)D^{n-1}[(x^2-1)^n]$ となることを示せ．
(ヒント：$D^{n+1}[(x^2-1)^{n+1}] = D^n[D[(x^2-1)^{n+1}]]$ を計算する．)

(3) (1)，(2) の結果からルジャンドル多項式は，$\left[(1-x^2)\dfrac{d}{dx} - (n+1)x\right] P_n(x) = -(n+1)P_{n+1}(x)$ の関係を満たすことを示せ．(ヒント：$D^{n-1}[(x^2-1)^n]$ の項を消去する．)

(4) ルジャンドル多項式はまた，$\left[(1-x^2)\dfrac{d}{dx} + nx\right] P_n(x) = nP_{n-1}(x)$ の関係を満たす．これと (3) の結果を用いて，ルジャンドル多項式が微分方程式 $(1-x^2)\dfrac{d^2u}{dx^2} - 2x\dfrac{du}{dx} + n(n+1)u = 0$ を満たすことを示せ．

(5) (3)，(4) の関係からルジャンドル多項式が漸化式 $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)$ を満たすことを示せ．