平成 29 年度 物理数学 I 期末試験問題

[1] 以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx}e^{inx}dx = 2\pi\delta_{nm}$ となることを示せ．

(2) 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義される周期 2π の関数 $f(x)$ が，$f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ とフーリエ級数展開できるとき，係数 C_m は，$C_m = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx$ で与えられることを示せ．

(3) 周期 2π の関数を $f(x) = -x, \quad (-\pi \leq x < \pi)$ とするとき，この関数の概形を描け．

(4) (3) の関数を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ の形にフーリエ級数展開せよ．

[2] ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ は，重み関数が 1 で区間 $[-1, 1]$ で，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}D^n[(x^2-1)^n]$ で与えられる．ここで，$D = \dfrac{d}{dx}$ である．また，漸化式 $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ を満たす．以下の問いに答えよ．

(1) $P_0(x)$ と $P_1(x)$ の具体的な表式を求めよ．

(2) $P_2(x)$ と $P_3(x)$ の具体的な表式を求めよ．

(3) $P_1(x)$ と $P_3(x)$ が直交することを示せ．

[3] チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ は $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ という関係を満たす．$x = \cos\theta$ とおくと，$\dfrac{dT_n(x)}{dx} = \dfrac{d\theta}{dx}\dfrac{dT_n(\cos\theta)}{d\theta}$，$\dfrac{d\theta}{dx} = 1/\dfrac{dx}{d\theta}$ と書けることを利用して以下の問いに答えよ．必要であれば加法定理，$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ を用いて良い．

(1) チェビシェフ多項式は，$\left[(1-x^2)\dfrac{d}{dx} - nx\right]T_n(x) = -nT_{n+1}(x)$ の関係を持つことを示せ．

(2) チェビシェフ多項式は，$\left[(1-x^2)\dfrac{d}{dx} + nx\right]T_n(x) = nT_{n-1}(x)$ の関係を持つことを示せ．

(3) (1) と (2) からチェビシェフ多項式は微分方程式，$(1-x^2)\dfrac{d^2u}{dx^2} - x\dfrac{du}{dx} + n^2u = 0$ を満たすことを示せ．

(4) (1) と (2) からチェビシェフ多項式は 3 項間漸化式，$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ を満たすことを示せ．