平成 28 年度 物理数学 I 期末試験問題

[1] 以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx}e^{inx}dx = 2\pi\delta_{nm}$ となることを示せ．

(2) 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義される周期 2π の関数 $f(x)$ が，$f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ とフーリエ級数展開できるとき，係数 C_m は，$C_m = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx$ で与えられることを示せ．

(3) $f(x) = \begin{cases} 1 & (-\pi \le x < 0) \\ 0 & (0 \le x < \pi) \end{cases}$ とするとき，この関数の概形を描け．

(4) (3) の関数を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ の形にフーリエ級数展開せよ．

[2] チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ は，区間 $[-1, 1]$ で重み関数 $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を用いて，
$T_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)!!}\dfrac{1}{w(x)}D^n[w(x)(1-x^2)^n]$ で与えられる．ここで，$D = \dfrac{d}{dx}$ であり，$(-1)!! = 1!! = 1$ である．
また，漸化式 $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ を満たす．以下の問いに答えよ．

(1) $T_0(x)$，$T_1(x)$ の具体的な表式を求めよ．

(2) $T_2(x)$，$T_3(x)$ の具体的な表式を求めよ．

(3) $T_0(x)$ と $T_2(x)$ が直交することを示せ．(ヒント：$x = \cos\theta$ とおく)

[3] エルミート多項式 $H_n(x)$ は微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2n\right)H_n(x) = \left(\frac{d}{dx} - 2x\right)\frac{d}{dx}H_n(x) + 2nH_n(x) = 0 \qquad \text{(a)}$$

を満たす．以下の問いの答えよ．

(1) 式 (a) は，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - 2x\right)H_n(x) + 2(n+1)H_n(x) = 0 \qquad \text{(b)}$$

と書き換えられることを示せ．

(2) 式 (b) に左から $\left(\dfrac{d}{dx} - 2x\right)$ を作用させ，式 (a) と比べることで，$\left(\dfrac{d}{dx} - 2x\right)H_n(x) \propto H_{n+1}(x)$ となることを示せ．

(3) $H_n(x)$ の最大次数すなわち x^n の係数が 2^n であることは既知として，(2) から $\left(\dfrac{d}{dx} - 2x\right)H_n(x) = -H_{n+1}(x)$ となることを示せ．(ヒント：x^{n+1} の係数を比較する)

(4) $H_0(x) = 1$ である．$H_1(x)$ と $H_2(x)$ を求めよ．