

[1] 以下の問いに答えなさい.

(1)  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{inx} dx = 2\pi \delta_{nm}$  となることを示せ.

(2) 区間  $[-\pi, \pi]$  で定義される周期  $2\pi$  の関数  $f(x)$  が  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$  とフーリエ級数展開できるとき,

係数  $C_m$  は,  $C_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$  で与えられることを示せ.

(3) 周期  $2\pi$  の関数  $f(x) = x$ ,  $(-\pi \leq x < \pi)$  の概形を描け.

(4) (3)の関数を  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$  の形にフーリエ級数展開せよ.

[2] ルジャンドル多項式  $P_n(x)$  は, 重み関数が 1 で区間  $[-1, 1]$  で,  $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n [(x^2 - 1)^n]$  で与えら

れる. ここで,  $D = \frac{d}{dx}$  である. また, 漸化式  $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$  を満たす. 以下

の問いに答えよ.

(1)  $P_0(x)$  と  $P_1(x)$  の具体的な表式を求めよ.

(2)  $P_2(x)$  と  $P_3(x)$  の具体的な表式を求めよ.

(3)  $P_1(x)$  と  $P_3(x)$  が直交することを示せ.

[3] エルミート多項式は  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n [e^{-x^2}]$  で与えられる. ただし,  $D = \frac{d}{dx}$  である. 以下の問い

に答えよ.

(1)  $\left(\frac{d}{dx} - 2x\right)H_n(x) = -H_{n+1}(x)$  となることを示せ. (ヒント:  $\frac{d}{dx}H_n(x)$  を計算する.)

(2)  $\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ ,  $n \geq 1$  となることを示せ. (ヒント: (1)の右辺で,  $D^{n+1}[e^{-x^2}] = D^n[D[e^{-x^2}]]$

を計算して公式  $D^n[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n C_k D^k[f(x)]D^{n-k}[g(x)]$  を適用する.)

(3) (1), (2)の結果から, エルミート多項式は漸化式,  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$  を満たすことを示せ.

(4) (1), (2)の結果から, エルミート多項式は微分方程式,  $\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + 2nu = 0$  を満たすことを示せ.

(ヒント: (1)式の両辺に左から  $\frac{d}{dx}$  を作用させる)