平成 26 年度　物理数学 I　試験問題

[1] 以下の問いに答えなさい.

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{inx} dx = 2\pi\delta_{nm}$ となることを示せ.

(2) 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義される周期 2π の関数 $f(x)$ が $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ とフーリエ級数展開できるとき，

係数 C_m は，$C_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$ で与えられることを示せ.

(3) $f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \le x < 0) \\ 1 & (0 \le x < \pi) \end{cases}$ とするとき，この関数の概形を描け.

(4) (3)の関数を $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ の形にフーリエ級数展開せよ.

[2] チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ は，区間[-1,1]で重み関数 $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を用いて，

$T_n(x) = \frac{(-)^n}{(2n-1)!!}\frac{1}{w(x)} D^n [w(x)(1-x^2)^n]$ で与えられる．ここで，$D = \frac{d}{dx}$ であり，$(-1)!! = 1!! = 1$ である．また，漸化式 $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ を満たす．以下の問いに答えよ.

(1) $T_0(x)$，$T_1(x)$ の具体的な表式を求めよ.

(2) $T_2(x)$，$T_3(x)$ の具体的な表式を求めよ.

(3) $T_0(x)$ と $T_2(x)$ が直交することを示せ.（ヒント：$x = \cos\theta$ とおく）

[3] エルミート多項式は $H_n(x) = (-)^n e^{x^2} D^n [e^{-x^2}]$ で与えられる．ただし，$D = \frac{d}{dx}$ である．以下の問いに答えよ.

(1) $H_n(x) = (-)^n e^{x^2} D^n [e^{-x^2}]$ の両辺を x について微分することで，$\left(\frac{d}{dx} - 2x\right) H_n(x) = -H_{n+1}(x)$ となることを示せ.

(2) エルミート多項式の母関数展開，$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n$ の両辺を x について偏微分することで

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx} H_n(x)\right) t^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^{n+1}$ となることを示せ.

(3) (2)の結果から，$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ となることを示せ.

(4) $\left(\frac{d}{dx} - 2x\right) H_n(x) = -H_{n+1}(x)$ の両辺を x について微分することで，$H_n(x)$ が微分方程式,

$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2n\right) u(x) = 0$ を満たすことを示せ.（ヒント：(3)の結果は右辺の微分に用いる）