平成２５年度　物理数学Ｉ　試験問題

[1] 以下の問いに答えなさい.

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{inx} dx = 2\pi\delta_{nm}$ となることを示せ.

(2) 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義される周期 2π の関数 $f(x)$ が $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ とフーリエ級数展開できるとき，係数 C_m は，$C_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$ で与えられることを示せ.

(3) 周期 2π の関数 $f(x) = x, \quad (-\pi \le x < \pi)$ の概形を描け.

(4) (3)の関数を $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ の形にフーリエ級数展開せよ.

[2] ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ は，重み関数が 1 で区間[-1,1]で，$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n[(x^2-1)^n]$ で与えられる．ここで，$D = \frac{d}{dx}$ である．また，漸化式 $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ を満たす．以下の問いに答えよ.

(1) $P_0(x)$ と $P_1(x)$ の具体的な表式を求めよ.

(2) $P_2(x)$ と $P_3(x)$ の具体的な表式を求めよ.

(3) $P_1(x)$ と $P_3(x)$ が直交することを示せ.

[3] [2]で定義されるルジャンドル多項式について，以下の問いに答えなさい.

（ヒント：$D^n[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k D^k[f(x)] D^{n-k}[g(x)]$）

(1) $D^{n+1}[(x^2-1)^{n+1}] = (x^2-1)D^{n+1}[(x^2-1)^n] + 2(n+1)xD^n[(x^2-1)^n] + n(n+1)D^{n-1}[(x^2-1)^n]$ となることを示せ.（ヒント：$D^{n+1}[(x^2-1)^{n+1}] = D^{n+1}[(x^2-1)(x^2-1)^n]$ として公式を適用する.）

(2) $D^{n+1}[(x^2-1)^{n+1}] = 2(n+1)xD^n[(x^2-1)^n] + 2n(n+1)D^{n-1}[(x^2-1)^n]$ となることを示せ.
（ヒント：$D^{n+1}[(x^2-1)^{n+1}] = D^n[D[(x^2-1)^{n+1}]]$ を先に計算する.）

(3) (1)，(2)の結果から，ルジャンドル多項式は，$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx} - (n+1)x\right]P_n(x) = -(n+1)P_{n+1}(x)$ の関係を満たすことを示せ.（ヒント：$D^{n-1}[(x^2-1)^n]$ の項を消去する.）

(4) ルジャンドル多項式はまた，$\left[(1-x^2)\frac{d}{dx} + nx\right]P_n(x) = nP_{n-1}(x)$ の関係を満たす．これと(3)の関係を用いて，ルジャンドル多項式が微分方程式，$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + n(n+1)u = 0$ を満たすことを示せ.

(5) (3),(4)の関係から[2]で示した漸化式 $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ が成り立つことを示せ.