

[1] 以下の問いに答えなさい。

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{inx} dx = 2\pi\delta_{nm}$ となることを示せ。

(2) 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義される周期 2π の関数 $f(x)$ が $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ とフーリエ級数展開できるとき、

係数 C_m は、 $C_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$ で与えられることを示せ。

(3) 周期 2π の関数 $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$ の概形を描け。

(4) (3)の関数を $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ の形にフーリエ級数展開せよ。

[2] チェビシエフ多項式 $T_n(x)$ は、区間 $[-1, 1]$ で重み関数 $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を用いて、

$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \frac{1}{w(x)} D^n [w(x)(1-x^2)^n]$ で与えられる。ここで、 $D = \frac{d}{dx}$ であり、 $(-1)!! = 1!! = 1$ であ

る。また、漸化式 $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ を満たす。以下の問いに答えなさい。

(1) $T_0(x)$, $T_1(x)$ の具体的な表式を求めなさい。

(2) $T_2(x)$, $T_3(x)$ の具体的な表式を求めなさい。

(3) $T_0(x)$ と $T_2(x)$ が直交することを示しなさい。(ヒント: $x = \cos \theta$ とおく)

[3] エルミート多項式は $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n [e^{-x^2}]$ で与えられる。ただし、 $D = \frac{d}{dx}$ である。以下の問い

に答えよ。

(1) $\left(\frac{d}{dx} - 2x\right)H_n(x) = -H_{n+1}(x)$ となることを示せ。(ヒント: $\frac{d}{dx}H_n(x)$ を計算する。)

(2) $\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$, $n \geq 1$ となることを示せ。(ヒント: (1)の右辺で、 $D^{n+1}[e^{-x^2}] = D^n[D[e^{-x^2}]]$

を計算して公式 $D^n[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n C_k D^k[f(x)]D^{n-k}[g(x)]$ を適用する。)

(3) (1), (2)の結果から、エルミート多項式は漸化式、 $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ を満たすことを示せ。

(4) (1), (2)の結果から、エルミート多項式は微分方程式、 $\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + 2nu = 0$ を満たすことを示せ。

(ヒント: (1)式の両辺に左から $\frac{d}{dx}$ を作用させる)