2018年度　物質科学ゼミナール(田中担当分)

締め切り：2018/6/1(金)

[1] 常微分方程式 $y' = -2y, \quad y(0) = 1$について以下の問題を解きなさい.

(1) 上の微分方程式の厳密解を求めなさい.

(2) 上の微分方程式を中心差分により解く差分方程式を求めなさい.

(注) 差分の刻みを h とし $y_i = y(ih)$ とおくと中心差分は,

$y_i' \cong \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ と近似する方法である.

(3) (2)で求めた差分方程式をエクセルもしくは Open Office Calc を用いて解き，(1)の厳密解と比較しなさい. y_1はオイラー法により $y_1 \cong y_0 + hy_0'$と近似する. HP にオイラー法を用いた例を置いておくので参考にすること. レポートには解析結果のグラフを添付すること.

(4) t についての 2 次方程式 $at^2 + bt + c = 0$ の 2 つの解を α, β とすると，差分方程式 $ay_{i+1} + by_i + cy_{i-1} = 0$の一般解は $y_i = C_1\alpha^i + C_2\beta^i$ で与えられることを示せ. 線形独立な解が 2 つしかないことは示さなくてよい.

(5) (2)で求めた差分方程式が不安定になる理由を説明せよ.

[2] Cooley-Turkey 型 FFT について以下の問いに答えなさい.

(1) 要素数を N とすると，Cooley-Turkey 型の FFT の計算コストが $N \log N$に比例する理由を述べなさい.

(2) 数列 $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$を離散フーリエ変換して， $\{\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$となるとする.

$W_N^m \equiv Exp[-i\dfrac{2\pi}{N}m]$とするとき，Cooley-Turkey 型の FFT を用いて計算すると， $\tilde{f}_n$(n=0, 1, 2, 3)は $\{W_4^0, W_4^1, W_4^2, W_4^3\}$ と $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$により，どのように表されるか具体的に書き下せ.