平成 28 年度 線形代数基礎 期末試験問題

[1] 以下の問いに答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき，積 AB を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ i \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$ とするとき，内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を求めよ．

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，積 AB と BA を求めよ．

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ とするとき，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(5) (4) の結果を用いて連立方程式，$\begin{cases} 2x - 3y &= 1 \\ 2x - 4y &= 2 \end{cases}$ を解け．**途中の計算も示すこと**．

[2] 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の余因子と行列式を計算せよ．**途中の計算も示すこと**．

(1) Δ_{11} (2) Δ_{21} (3) Δ_{31} (4) Δ_{41} (5) $|A|$

[3] 時計回りに θ 回転する 1 次変換の表現行列は，$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) A がユニタリ行列であることを示せ．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．**途中の計算または求め方を示すこと**

(3) 行列 A で $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ である行列を B とする．この行列 B で表現される 1 次変換により方程式 $x^2+2xy+y^2+x-y=0$ はどのような方程式に変換されるか求めよ．

(4) (3) の結果から，**もとの方程式** $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$ のグラフの概形を描け．

[4] $A = \begin{pmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ とするとき以下の問いに答えよ．

(1) A がエルミート行列であることを示せ．

(2) この行列の固有値を全て求めよ．

(3) (2) で求めた固有値に対応する規格化された固有ベクトルを求めよ．

(4) (3) で求めた固有ベクトルが直交することを示せ．**計算も示すこと**．

(5) 行列 A を対角化せよ．**途中の計算も示すこと**