

Josephson 効果と SQUID

武藤 哲也

[1] Josephson 効果

2つの超伝導体（便宜的に超伝導体 1 と超伝導体 2 とする）が，薄い絶縁膜を挟んで隣り合わせになっている状況を考える（トンネル接合）．1 と 2 の超伝導体のそれぞれの秩序変数（G-L 理論の擬波動関数）を Ψ_1 と Ψ_2 とする．2つの超伝導体の間のトンネル効果により電子対の移動が起きる場合に，時間に依存する Schrödinger 方程式が，

$$i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} = U_1 \Psi_1 + K \Psi_2 \quad (1)$$

$$i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} = U_2 \Psi_2 + K \Psi_1 \quad (2)$$

と表されたとする．ここで， U_1 と U_2 はそれぞれの超伝導体のエネルギー， K はトンネル効果による単位時間当たりの透過確率に比例する電子対移動相互作用エネルギーである．

接合間に電圧 V を印加すると，電子対の電荷 $-2e$ について， $-2eV$ のエネルギー差が生じて，

$$U_1 - U_2 = -2eV \quad (3)$$

が成り立つ時，エネルギーの原点を U_1 と U_2 の平均値に取って，

$$\frac{U_1 + U_2}{2} = 0 \quad (4)$$

とおけば，(3) と (4) から，

$$U_1 = -eV$$

$$U_2 = eV$$

と表せるので，(1) と (2) を，それぞれ，

$$i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} = -eV \Psi_1 + K \Psi_2 \quad (5)$$

$$i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} = eV \Psi_2 + K \Psi_1 \quad (6)$$

と表しておく．

Ψ_j は超伝導体 j のマクロな擬波動関数であり，その絶対値の 2 乗が超伝導体 j の電子対密度 n_j を表し， $n_j = |\Psi_j|^2$ と表されるので， Ψ_j を，位相 θ_j を用いた極表示 $\Psi_j = \sqrt{n_j} e^{i\theta_j}$ で表しておく ($j = 1, 2$)． Ψ_j の時間変化は，

$$\frac{d\Psi_j}{dt} = \frac{e^{i\theta_j}}{2\sqrt{n_j}} \frac{dn_j}{dt} + i\sqrt{n_j} e^{i\theta_j} \frac{d\theta_j}{dt} \quad (j = 1, 2)$$

となるので，これらを用いれば，(5) と (6) は，それぞれ，

$$i\hbar \frac{e^{i\theta_1}}{2\sqrt{n_1}} \frac{dn_1}{dt} - \hbar\sqrt{n_1} e^{i\theta_1} \frac{d\theta_1}{dt} = -eV \sqrt{n_1} e^{i\theta_1} + K \sqrt{n_2} e^{i\theta_2} \quad (7)$$

$$i\hbar \frac{e^{i\theta_2}}{2\sqrt{n_2}} \frac{dn_2}{dt} - \hbar\sqrt{n_2} e^{i\theta_2} \frac{d\theta_2}{dt} = eV \sqrt{n_2} e^{i\theta_2} + K \sqrt{n_1} e^{i\theta_1} \quad (8)$$

となる．(7) の両辺に $\sqrt{n_1} e^{-i\theta_1}$ を掛けて，(8) の両辺に $\sqrt{n_2} e^{-i\theta_2}$ を掛けて，それぞれまとめると，

$$i\hbar \frac{1}{2} \frac{dn_1}{dt} - \hbar n_1 \frac{d\theta_1}{dt} = -eV n_1 + K \sqrt{n_1 n_2} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \quad (9)$$

$$i\hbar \frac{1}{2} \frac{dn_2}{dt} - \hbar n_2 \frac{d\theta_2}{dt} = eV n_2 + K \sqrt{n_1 n_2} e^{-i(\theta_2 - \theta_1)} \quad (10)$$

を得る．(9) の両辺の虚部どうし，および，(10) の両辺の虚部どうしを等置して， $\text{Im}(e^{\pm i(\theta_2 - \theta_1)}) = \pm \sin(\theta_2 - \theta_1)$ （複号同順）に注意すれば，

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= \frac{2K}{\hbar} \sqrt{n_1 n_2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{dn_2}{dt} &= -\frac{2K}{\hbar} \sqrt{n_1 n_2} \sin(\theta_2 - \theta_1)\end{aligned}$$

が得られる．電子対の運ぶ電流 J を $J = 2e \frac{dn_1}{dt} = -2e \frac{dn_2}{dt}$ と表すと，上式から，

$$J = \frac{4Ke}{\hbar} \sqrt{n_1 n_2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \equiv \frac{4Ke}{\hbar} \sqrt{n_1 n_2} \sin \theta \quad (11)$$

$$\theta \equiv \theta_2 - \theta_1 \quad (12)$$

となることがわかる（超伝導体 1 と 2 の位相差 θ を定義した）．一方，(9) の両辺の実部と (10) の両辺の実部の辺々を引けば，

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} \quad (13)$$

が得られる．

超伝導体 1 と 2 の間の電位差 V が 0 であると，(13) から，超伝導体間の位相差 θ は時間変化しないことがわかる．しかし，それでも，一般には位相差 θ 自体は有限となり得る．位相差 θ が有限の値を持つ場合には，(11) から，たとえ超伝導体間に電位差 V がなくても，超伝導体間には電流 J が流れ得ることになる．これを直流 Josephson 効果という．また，接合間に有限で一定の電位差 V があると，(13) から，位相差に一定の時間変化が生じるが，その時間変化は，(11) を通じて，電流の周期的な変化となって現れる．即ち，一定の電位差がある接合間に交流電流が流れることになる．これを交流 Josephson 効果という．

[2] SQUID（超伝導量子干渉素子）

中空のドーナツ型の超伝導体に 2 箇所の「切れ目」を入れて，2 つの超伝導体 A と B に分割し，「切れ目」をトンネル接合した系について，超伝導体にリード線をつけて定常電流 I を流した場合を考える（図参照）．電流 I は十分弱く，超伝導体間の接合では [1] の Josephson 効果が起きるとする．また，理想的な状況として，各接合は等価であると仮定する．超伝導体 A または B の，接合 1 と 2 での位相を，各々 $\theta_{A(B)1}$ と $\theta_{A(B)2}$ で表せば，Josephson 効果の表式から，電流 I は，各接合を通る電流を I_0 として，

$$I = I_0(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \quad (14)$$

$$\theta_1 \equiv \theta_{A1} - \theta_{B1} \quad (15)$$

$$\theta_2 \equiv \theta_{A2} - \theta_{B2} \quad (16)$$

と表せる．

超伝導体の十分内部（ドーナツの「芯」）に閉曲線径路 C をとり，径路 C 上では電流密度を無視できるとすると，G-L の第 2 方程式から，径路上のベクトルポテンシャルは，その点での擬波動関数の位相の勾配に比例して，

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar c}{2e} \nabla \theta(\mathbf{r}) \quad (17)$$

と表されるのであった（超伝導を担う粒子の電荷 e^* を電子対の電荷とした）．閉曲線径路 C を，超伝導体 A 内部の接合 1 から接合 2 までの径路 C_A と，超伝導体 B 内部の接合 2 から接合 1 までの径路 C_B に分割して（ $C = C_A + C_B$ ），(17) の両辺を，超伝導体 A 内部の径路 C_A 上，および，超伝導体 B 内部の径路

C_B 上で、それぞれ線積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{C_A} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &\stackrel{(17)}{=} \frac{\hbar c}{2e} \int_{C_A} \nabla \theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar c}{2e} (\theta_{A2} - \theta_{A1}) \\ \int_{C_B} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &\stackrel{(17)}{=} \frac{\hbar c}{2e} \int_{C_B} \nabla \theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar c}{2e} (\theta_{B1} - \theta_{B2})\end{aligned}$$

となる．従って、ドーナツ型の超伝導体十分内部の閉曲線径路 C での周回線積分は、

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_A} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_B} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar c}{2e} \{(\theta_{A2} - \theta_{A1}) + (\theta_{B1} - \theta_{B2})\} \\ &\stackrel{(15)(16)}{=} \frac{\hbar c}{2e} (\theta_2 - \theta_1)\end{aligned}\tag{18}$$

と表される．

一方、(18) の最左辺は、Stokes の定理から、 C を縁とする任意の開曲面を S として (S の裏から表の向きは、 C の向きに回す右ネジが進む向きとする)、

$$\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \Phi\tag{19}$$

となって、この系の中空部を貫く全磁束 Φ (S を裏から表に貫く方向を正とする) に等しいので、(18) の最右辺と (19) の最右辺を等置すれば、

$$\frac{\hbar c}{2e} (\theta_2 - \theta_1) = \Phi$$

となる．従って、磁束量子 $\Phi_0 \equiv \frac{\hbar c}{2e}$ を用いれば、

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{2e}{\hbar c} \Phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\tag{20}$$

と表されることがわかる．ここで、 θ を、 θ_1 と θ_2 の平均値として、

$$\theta \equiv \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\tag{21}$$

と定義すれば、(20) と (21) から、 θ_1 と θ_2 は、それぞれ、

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta - \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \\ \theta_2 &= \theta + \pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\end{aligned}$$

と表されるので、(14) の電流 I も、 Φ を用いて、

$$I = I_0 \left\{ \sin \left(\theta - \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) + \sin \left(\theta + \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right\} = 2I_0 \sin \theta \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)\tag{22}$$

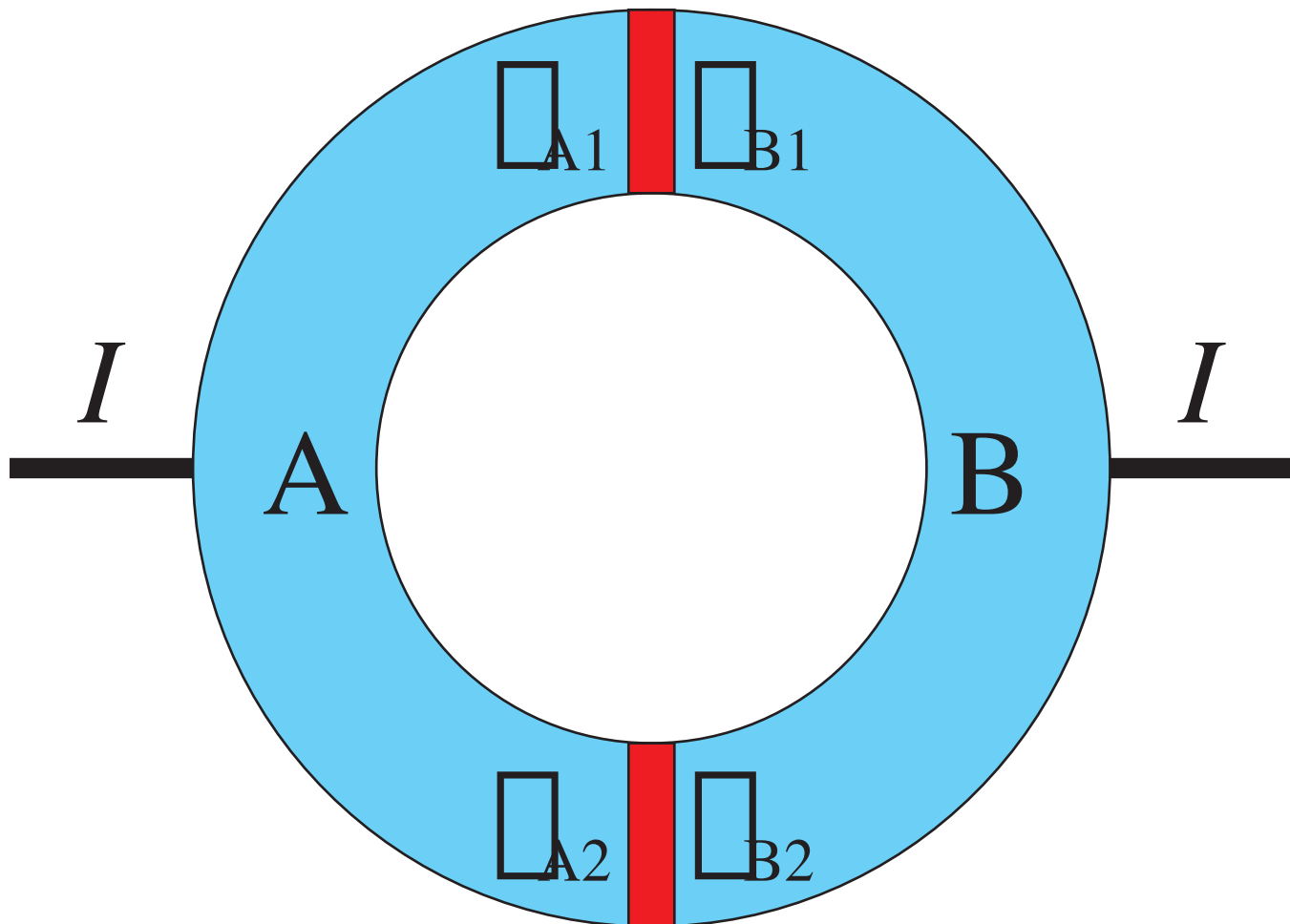
と表される．

(22) から、電流 I の最大値は Φ の関数となり、それを $I_{\max}(\Phi)$ と表せば、

$$I_{\max}(\Phi) = 2I_0 \left| \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right|\tag{23}$$

となって、 $I_{\max}(\Phi)$ が、 $\Phi = n\Phi_0$ で最大値 $2I_0$ 、 $\Phi = (n + 1/2)\Phi_0$ で最小値 0 を取る、 Φ について周期 Φ_0 の周期関数となることがわかる ($n \in \mathbb{Z}$)．即ち、Josephson 接合された超伝導体 A と B から成る系に流れる電流の最大値 $I_{\max}(\Phi)$ を測定することで、原理的に $\Phi_0 \equiv 2 \times 10^{-7} \text{Gcm}^2$ 程度の微小な磁束変化を検出することができることになる．実際、この原理を用いた SQUID (Superconducting QUantum Interference Device：超伝導量子干渉素子) と呼ばれる装置が実用化されている．

接合1



接合2