電気抵抗極小現象に対する近藤理論

— s-d 交換相互作用による電子の散乱過程 —

武藤　哲也

電気抵抗 $R(T)$ は、電気伝導度 $\sigma(T)$ の逆数であり、$\sigma(T)$ は、電場により電流が流れている時の分布関数が Fermi 分布関数 $f(\varepsilon_k) = (\mathrm{e}^{(\varepsilon_k-\varepsilon_\mathrm{F})/(k_\mathrm{B}T)}+1)^{-1}$ に緩和するまでの緩和時間 $\tau(\varepsilon_k)$ を用いて、

$$\sigma(T) = \frac{1}{\Omega}\frac{e^2}{m}\frac{4}{3}\int d\varepsilon_k \rho(\varepsilon_k)\varepsilon_k\tau(\varepsilon_k)\left(-\frac{\partial f(\varepsilon_k)}{\partial\varepsilon_k}\right) \tag{1}$$

と表される（波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を、単に k と書いた）。Ω は系の体積、e と m は電子の電荷と質量、$\rho(\varepsilon_k)$ は伝導電子の状態密度である。緩和時間 $\tau(\varepsilon_k)$ は、散乱確率（遷移確率）から計算される。

ここでは、s-d モデルのハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_\mathrm{ex} \tag{2}$$

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{k\sigma}\varepsilon_k c^\dagger_{k\sigma}c_{k\sigma} \tag{3}$$

$$\mathcal{H}_\mathrm{ex} = -\frac{J_\mathrm{eff}}{2N}\sum_{\substack{kk'\\ \sigma\sigma'}} c^\dagger_{k'\sigma'}\boldsymbol{\sigma}_{\sigma'\sigma}c_{k\sigma}\cdot\boldsymbol{S} \tag{4}$$

の中の、s-d 交換相互作用 (4) 式によって、Fermi 球の外側の波数 k、スピン σ の伝導電子が (k', σ') に散乱される場合の散乱確率を計算する。近藤が 1964 年に行ったのは、$J_\mathrm{eff}/\varepsilon_\mathrm{F}$ が小さいとして無視されていた（第一 Born 近似より高次の）散乱過程の計算であり、それにより、電気抵抗極小現象が、s-d 交換相互作用に由来する量子多体効果であることが明らかにされた。ここでも、その計算を追うことにする（具体的な計算は『固体の電子論』斯波弘行著（丸善）、『磁性』芳田奎著（岩波書店）、『金属電子論』近藤淳著（裳華房）を参考にした）。

Fermi の黄金率によれば、上述の散乱過程 $(k, \sigma)\to(k', \sigma')$ における散乱確率を $W[(k,\sigma)\to(k',\sigma')]$ とすると、

$$W[(k,\sigma)\to(k',\sigma')] = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle k'\sigma'|T|k\sigma\rangle|^2\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'}) \tag{5}$$

と表される（Fermi の黄金率は狭義には摂動の一次の場合の呼称）。散乱の遷移行列（T 行列）T は、

$$T = \mathcal{H}_\mathrm{ex} + \mathcal{H}_\mathrm{ex}\frac{1}{E_\mathrm{i}-\mathcal{H}_0}\mathcal{H}_\mathrm{ex} + \cdots \tag{6}$$

と、摂動ハミルトニアン $\mathcal{H}_\mathrm{ex}$ を用いて表される。始状態の $|k\sigma\rangle$ は、Fermi 球 $|\mathrm{FS}\rangle$ の外側に (k, σ) の電子がいる状態であり、そのエネルギーは Fermi 球のエネルギー E_0 と (k, σ) の伝

導電子のエネルギーの和である。同様に、終状態はFermi球の外側に (k', σ') の電子がいる状態となる。

$$
\begin{aligned}
|k\sigma\rangle &= c_{k\sigma}^{\dagger}|\mathrm{FS}\rangle & (7)\\
\langle k'\sigma'| &= \langle \mathrm{FS}|c_{k'\sigma'} & (8)\\
E_{\mathrm{i}} &= E_0 + \varepsilon_k & (9)
\end{aligned}
$$

$(k,\uparrow) \to (k',\sigma')$ の遷移を考えた時、T 行列の一次の項は、局在スピンの演算子を残した表記で、

$$
\begin{aligned}
\langle k'\uparrow|\mathcal{H}_{\mathrm{ex}}|k\uparrow\rangle &= -\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}S_z & (10)\\
\langle k'\downarrow|\mathcal{H}_{\mathrm{ex}}|k\uparrow\rangle &= -\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}S_+ & (11)
\end{aligned}
$$

となる。従って、一次摂動での遷移確率は、

$$
\begin{aligned}
W^{(1)}[(k,\uparrow)\to(k',\uparrow)] &= \frac{2\pi}{\hbar}\left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 S_z^2\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'}) & (12)\\
W^{(1)}[(k,\uparrow)\to(k',\downarrow)] &= \frac{2\pi}{\hbar}\left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 S_-S_+\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'}) & (13)
\end{aligned}
$$

緩和時間 $\tau(\varepsilon_k)$ の逆数は、$W[(k,\sigma)\to(k',\sigma')]$ の全ての終状態の和で表される。局在スピンについては、常磁性を仮定して、スピンの向きについての平均を用いることにする。

$$
\begin{aligned}
\overline{S_z^2} &= \frac{1}{3}S(S+1) & (14)\\
\overline{S_-S_+} &= \frac{2}{3}S(S+1) & (15)
\end{aligned}
$$

すると、一次摂動による緩和時間 $\tau^{(1)}(\varepsilon_k)$ の逆数は、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tau^{(1)}(\varepsilon_k)} &= \int d\varepsilon_{k'}\rho(\varepsilon_{k'})\frac{2\pi}{\hbar}\left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 S(S+1)\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'}) & (16)\\
&= \frac{2\pi}{\hbar}\rho(\varepsilon_k)\left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 S(S+1) & (17)
\end{aligned}
$$

で与えられる。ただし、Fermi分布関数の微分を δ 関数（に負符号をつけたもの）として扱った。上述の一次摂動での計算（第一Born近似）による電気伝導度 σ_{B} は、(1) 式より、

$$
\sigma_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\Omega}\frac{2}{3}\frac{e^2\hbar}{m\pi}\varepsilon_{\mathrm{F}}\left(-\frac{2N}{J_{\mathrm{eff}}}\right)^2\frac{1}{S(S+1)} \tag{18}
$$

となる。従って、第一Born近似による電気抵抗 R_{B} は、

$$
R_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2}\frac{m\pi}{e^2\hbar}\frac{\Omega}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 S(S+1) \tag{19}
$$

となる。つまり、摂動の一次まででは電気抵抗は温度に依存せず、電気抵抗極小現象は説明できない。

電気抵抗極小現象を説明する目的で、近藤は1964年に、さらに高次の二次の過程の計算を行った（J. Kondo, Prog. Theor. Phys. **32** (1964) 37）。二次の過程では、$(k,\uparrow)\rightarrow(k',\uparrow)$ については、次の過程がある。

(1) $(k,\uparrow)$ の伝導電子を $(k'',\uparrow)$ に移してから（中間状態）、電子を $(k',\uparrow)$ 状態に移す（終状態）→中間状態でのスピン反転はない

(2) $(k'',\uparrow)$ のホールと $(k',\uparrow)$ の電子を生成してから（中間）、$(k,\uparrow)$ の電子と $(k'',\uparrow)$ のホールが結合する（終）→中間状態でのスピン反転はない

(3) $(k,\uparrow)$ の伝導電子を $(k'',\downarrow)$ に移してから（中間）、電子を $(k',\uparrow)$ 状態に移す（終状態）→中間状態でスピン反転を伴う

(4) $(k'',\downarrow)$ のホールと $(k',\uparrow)$ の電子を生成してから（中間）、$(k,\uparrow)$ の電子と $(k'',\downarrow)$ のホールが結合する（終）→中間状態でスピン反転を伴う

(1) と (2) の過程では、中間状態でスピンの反転はないが、(3) と (4) の過程では、中間状態でスピンが反転する。実は、二次摂動で初めて現れる、このスピン反転を伴う中間状態が、量子多体効果の起源になっていることが後でわかる。それぞれの過程の表式は以下のように得られる。

(1) の過程

$$\left(-\frac{J_{\rm eff}}{2N}\right)^2 S_z^2 \sum_{k''}\langle k'\uparrow|\frac{c^\dagger_{k'\uparrow}c_{k''\uparrow}c^\dagger_{k''\uparrow}c_{k\uparrow}}{\varepsilon_k-\varepsilon_{k''}}|k\uparrow\rangle \tag{20}$$

(2) の過程

$$\left(-\frac{J_{\rm eff}}{2N}\right)^2 S_z^2 \sum_{k''}\langle k'\uparrow|\frac{c^\dagger_{k''\uparrow}c_{k\uparrow}c^\dagger_{k'\uparrow}c_{k''\uparrow}}{\varepsilon_{k''}-\varepsilon_{k'}}|k\uparrow\rangle \tag{21}$$

(3) の過程

$$\left(-\frac{J_{\rm eff}}{2N}\right)^2 S_-S_+ \sum_{k''}\langle k'\uparrow|\frac{c^\dagger_{k'\uparrow}c_{k''\downarrow}c^\dagger_{k''\downarrow}c_{k\uparrow}}{\varepsilon_k-\varepsilon_{k''}}|k\uparrow\rangle \tag{22}$$

(4) の過程

$$\left(-\frac{J_{\rm eff}}{2N}\right)^2 S_+S_- \sum_{k''}\langle k'\uparrow|\frac{c^\dagger_{k''\downarrow}c_{k\uparrow}c^\dagger_{k'\uparrow}c_{k''\downarrow}}{\varepsilon_{k''}-\varepsilon_{k'}}|k\uparrow\rangle \tag{23}$$

ここで、Fermi 演算子の反交換関係に注意すると、k'' 状態の占有確率 $f(\varepsilon_{k''})$（$f(\varepsilon)$ はFermi分布関数）を用いて、次を示すことができる。

$$\langle k'\uparrow|c^\dagger_{k'\uparrow}c_{k''\downarrow}c^\dagger_{k''\downarrow}c_{k\uparrow}|k\uparrow\rangle = 1-f(\varepsilon_{k''}) \tag{24}$$

$$\langle k'\uparrow|c^\dagger_{k''\downarrow}c_{k\uparrow}c^\dagger_{k'\uparrow}c_{k''\downarrow}|k\uparrow\rangle = -f(\varepsilon_{k''}) \tag{25}$$

これは、(1) と (3) の過程では、中間状態の k'' の状態は非占有でなければならず、(2) と (4) の過程では、k'' の状態は占有されていなければならないことの反映である（後者で負符号が出るのはFermi 粒子の反交換関係による）。

散乱前後でのエネルギー保存（始状態と終状態のエネルギーが等しい）を考慮し、$\varepsilon_k = \varepsilon_{k'}$ として、(1) と (2)、(3) と (4) の過程からの寄与を、それぞれまとめて表す。
(1) と (2) の過程からの寄与

$$\left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 S_z^2 \sum_{k''} \frac{1}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k''}} \tag{26}$$

(3) と (4) の過程からの寄与

$$\left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 \sum_{k''} \frac{S_- S_+ + f(\varepsilon_{k''})(S_+ S_- - S_- S_+)}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k''}} \tag{27}$$

(26) 式からわかるように、中間状態にスピン反転を伴わない過程からの寄与では、$f(\varepsilon_{k''})$ を含む項が相殺して、中間状態で Pauli の排他律を考慮しない結果と同じになる。つまり、この散乱過程は、他の電子の存在によらない一体問題として考えることができる。しかし、中間状態にスピン反転を伴う過程からの寄与 (27) 式には、$f(\varepsilon_{k''})$ が現れていて、他の電子の存在が影響を与えていることがわかる。しかも、この時、$f(\varepsilon_{k''})$ が現れているのは、局在スピン演算子が、$S_+S_- \neq S_-S_+$ と非可換なためであり、量子力学的な効果が重要であることを意味する。以上のことから、内部自由度を持つ局在スピンによる電子の散乱は、一体問題として扱うことは許されず、本質的に、他の電子の影響を考慮せざるを得なくなることがわかる。

局在スピンの演算子については、

$$\begin{aligned} S_z^2 + S_- S_+ &= S(S+1) - Sz \\ S_+ S_- - S_- S_+ &= 2Sz \end{aligned}$$

という関係が成り立つことを用いて、(26) 式と (27) 式を、さらにまとめておく。

$$\begin{aligned} (26) + (27) &= \left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 S(S+1) \sum_{k''} \frac{1}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k''}} && (28) \\ &+ \left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 S_z \sum_{k''} \frac{2f(\varepsilon_{k''}) - 1}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k''}} && (29) \end{aligned}$$

Fermi 分布関数を含む項 (29) 式は、後でわかるように重要な寄与を与えるが、Fermi 分布関数を含まない項 (28) 式は、$J_{\mathrm{eff}}/\varepsilon_{\mathrm{F}}$ が十分小さい限り重要でないので、以後省略する。

続いて、散乱前後でスピンが反転する、$(k, \uparrow) \to (k', \downarrow)$ の過程についての二次摂動を考える。この場合、最初の摂動でスピンを反転させずに、最後の摂動でスピンを反転させる過程（(1)' と (2)'）と、前者でスピンを反転させて、後者でスピンを反転させない過程（(3)' と (4)'）がある。中間状態でのスピンの z 成分に応じて、符号が変わることに注意する。
(1)' の過程

$$\left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 S_+ S_z \sum_{k''} \langle k' \uparrow | \frac{c^\dagger_{k'\downarrow} c_{k''\uparrow} c^\dagger_{k''\uparrow} c_{k\uparrow}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k''}} | k \uparrow \rangle \tag{30}$$

(2)' の過程

$$\left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 (-S_+ S_z) \sum_{k''} \langle k' \uparrow | \frac{c^\dagger_{k''\downarrow} c_{k\uparrow} c^\dagger_{k'\downarrow} c_{k''\downarrow}}{\varepsilon_{k''} - \varepsilon_{k'}} | k \uparrow \rangle \tag{31}$$

(3)' の過程

$$\left(-\frac{J_{\rm eff}}{2N}\right)^2(-S_zS_+)\sum_{k''}\langle k'\uparrow|\frac{c^\dagger_{k'\downarrow}c_{k''\downarrow}c^\dagger_{k''\downarrow}c_{k\uparrow}}{\varepsilon_k-\varepsilon_{k''}}|k\uparrow\rangle \tag{32}$$

(4)' の過程

$$\left(-\frac{J_{\rm eff}}{2N}\right)^2 S_zS_+\sum_{k''}\langle k'\uparrow|\frac{c^\dagger_{k''\uparrow}c_{k\uparrow}c^\dagger_{k'\downarrow}c_{k''\uparrow}}{\varepsilon_{k''}-\varepsilon_{k'}}|k\uparrow\rangle \tag{33}$$

再び、(24) 式や (25) 式を用いてまとめる。局在スピンの演算子について、

$$S_zS_+-S_+S_z=S_+$$

であることに注意すれば、

$$(30)+(31)+(32)+(33)=\left(-\frac{J_{\rm eff}}{2N}\right)^2S_+\sum_{k''}\frac{2f(\varepsilon_{k''})-1}{\varepsilon_k-\varepsilon_{k''}} \tag{34}$$

となることがわかる。散乱前後でスピン反転を伴う過程であるので、前述の散乱前後でスピンが反転しない場合の (3) と (4) の過程と同様に Fermi 分布関数が現れる。

以上の結果 (29) 式と (34) 式をまとめて、さらに、摂動の一次で得られた T 行列の結果 (10) 式と (11) 式とを合わせると、摂動の二次までの T 行列の表式が得られる。

$$\langle k'\uparrow|T|k\uparrow\rangle = \left(-\frac{J_{\rm eff}}{2N}\right)S_z\{1+J_{\rm eff}\,g(\varepsilon_k)\} \tag{35}$$

$$\langle k'\downarrow|T|k\uparrow\rangle = \left(-\frac{J_{\rm eff}}{2N}\right)S_+\{1+J_{\rm eff}\,g(\varepsilon_k)\} \tag{36}$$

$$g(\varepsilon) \equiv \frac{1}{2N}\sum_{k''}\frac{2f(\varepsilon_{k''})-1}{\varepsilon_{k''}-\varepsilon} \tag{37}$$

(35) 式と (36) 式からわかるように、これらの結果は、一次摂動の結果 (10) 式と (11) 式において、$J_{\rm eff}$ を $J_{\rm eff}(1+J_{\rm eff}\,g(\varepsilon_k))$ に置き換えることで得られることがわかる。以下で、二次摂動の効果を表す $g(\varepsilon)$ を計算する。

まず、(37) 式の k'' の和を、状態密度 $\rho(\varepsilon)$ を用いて積分に変える。この時、k'' 和については、本来の V の波数依存性（つまり $J_{\rm eff}$ の波数依存性）を考慮すると、あるところで打ち切られるべきであり、その目安となるエネルギーを D とする。これは、$\varepsilon_{\rm F}$ と同程度であり、伝導電子のバンド幅と考えてよい。Fermi 準位を原点にとれば、$\varepsilon_{\rm F}=D$ とおいて、

$$g(\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_{-D}^{D}d\varepsilon'(1-2f(\varepsilon'))\frac{\rho(\varepsilon')}{\varepsilon-\varepsilon'} \tag{38}$$

一般に、$g(\varepsilon)$ は ε と温度 T の関数だが、$|\varepsilon|,k_{\rm B}T\ll\varepsilon_{\rm F}$ の場合を問題にするので、$\rho(\varepsilon')$ を $\rho(0)\equiv\rho$ なる定数として積分の外に出す。これは、元々、状態密度を、$|\varepsilon|\le D$ のみで値を持つ定数と考えることと等しい。

$$\rho(\varepsilon)\equiv\begin{cases}\rho & |\varepsilon|\le D\\ 0 & |\varepsilon|>D\end{cases} \tag{39}$$

すると、(38) 式は、

$$
\begin{aligned}
&(38)\\
&= \frac{1}{2}\rho\int_{-D}^{D}d\varepsilon'\left\{\frac{d}{d\varepsilon'}(-(\ln|\varepsilon-\varepsilon'|)\right\}(1-2f(\varepsilon')) &(40)\\
&= \frac{1}{2}\rho\left\{-\ln|\varepsilon-D|(1-2f(D))+\ln|\varepsilon+D|(1-2f(-D))-2\int_{-D}^{D}d\varepsilon'\ln|\varepsilon-\varepsilon'|\frac{df(\varepsilon')}{d\varepsilon'}\right\} &(41)\\
&\simeq \frac{1}{2}\rho\left\{-\ln|\varepsilon-D|-\ln|\varepsilon+D|+2\int_{-D}^{D}d\varepsilon'\ln|\varepsilon-\varepsilon'|\left(-\frac{df(\varepsilon')}{d\varepsilon'}\right)\right\} &(42)
\end{aligned}
$$

(40) 式から (41) 式の導出には部分積分を用い、(41) 式から (42) 式を導く際には、$D \gg k_{\mathrm{B}}T$ であるので、

$$
f(D) \simeq 0
$$
$$
f(-D) \simeq 1
$$

となることを用いた。ここで、{ } 内の第二項の積分を I として具体的に計算する。

$$
I \equiv 2\int_{-D}^{D}d\varepsilon'\ln|\varepsilon-\varepsilon'|\left(-\frac{df(\varepsilon')}{d\varepsilon'}\right) \tag{43}
$$

まず、$|\varepsilon| \gg k_{\mathrm{B}}T$ では、Fermi 分布関数の微分は δ 関数（に負符号をつけたもの）と見做してよいので、

$$
I \simeq 2\ln|\varepsilon| \qquad (|\varepsilon| \gg k_{\mathrm{B}}T) \tag{44}
$$

となる。次に、$|\varepsilon| \ll k_{\mathrm{B}}T$ での積分 I を評価しよう。Fermi 分布関数の微分が、

$$
-\frac{df(\varepsilon')}{d\varepsilon'} = \frac{1}{4k_{\mathrm{B}}T\cosh^2\dfrac{\varepsilon'}{2k_{\mathrm{B}}T}} \tag{45}
$$

となることを用いれば、

$$
\begin{aligned}
I &\simeq \frac{1}{2k_{\mathrm{B}}T}\int_{-D}^{D}d\varepsilon'\ln|\varepsilon'|\frac{1}{\cosh^2\dfrac{\varepsilon'}{2k_{\mathrm{B}}T}} &(46)\\
&\simeq \frac{1}{2}\ln(k_{\mathrm{B}}T)\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{1}{\cosh^2\dfrac{x}{2}}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\ln|x|\frac{1}{\cosh^2\dfrac{x}{2}} &(47)
\end{aligned}
$$

と変型できる。上式の最初の変型では、$|\varepsilon| \ll k_{\mathrm{B}}T$ を考えているので、積分中で $\varepsilon \simeq 0$ と見做した。最後の変型では、$\varepsilon' = k_{\mathrm{B}}Tx$ の変数変換を行い、$D/(k_{\mathrm{B}}T) \gg 1$ であるため、積分範囲を無限大にした上で、$\ln|k_{\mathrm{B}}Tx| = \ln(k_{\mathrm{B}}T) + \ln|x|$ とした。最後の式に現れる積分は、共に定数を与えるが、それらの定数は以下のように計算される。

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{1}{\cosh^2\dfrac{x}{2}} &= 2\int_{0}^{\infty}dx\frac{1}{\cosh^2\dfrac{x}{2}} = 4\int_{0}^{1}dt = 4 &(48)\\
\int_{-\infty}^{\infty}dx\ln|x|\frac{1}{\cosh^2\dfrac{x}{2}} &= 2\int_{0}^{\infty}dx\ln x\frac{1}{\cosh^2\dfrac{x}{2}} = -4\ln\frac{2\mathrm{e}^{\gamma}}{\pi} &(49)
\end{aligned}
$$

(48) 式では $t = \tanh(x/2)$ の変数変換を行っている。また、(49) 式に現れる γ は Euler の定数と呼ばれ、$\gamma \equiv \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n) \fallingdotseq 0.577$ である（なお、(49) 式は、BCS 理論による超伝導の転移温度の計算にも現れ、その導出は、たとえば、『多粒子系の量子論 理論編』Fetter ／ Walecka 共著　松原／藤井 共訳 （マグロウヒル）の付録 A：定積分の項に詳しい）。(48) 式と (49) 式から、最終的に、積分 I の $|\varepsilon| \ll k_{\mathrm{B}}T$ での評価は次のようになる。

$$I \simeq 2\ln|k_{\mathrm{B}}T| - 2\ln\frac{2\mathrm{e}^{\gamma}}{\pi} \qquad (|\varepsilon| \ll k_{\mathrm{B}}T) \tag{50}$$

結局、以上の結果から、$|\varepsilon|, k_{\mathrm{B}}T \ll \varepsilon_{\mathrm{F}}, D$ の場合には、(42) 式に、(44) 式や (50) 式を考慮して、

$$g(\varepsilon) \simeq \begin{cases} \rho\ln\dfrac{|\varepsilon|}{D} & (|\varepsilon| \gg k_{\mathrm{B}}T) \\ \rho\ln\dfrac{\pi k_{\mathrm{B}}T}{2\mathrm{e}^{\gamma}D} & (|\varepsilon| \ll k_{\mathrm{B}}T) \end{cases} \tag{51}$$

となることがわかった。$g(\varepsilon)$ は、$k_{\mathrm{B}}T$ と $|\varepsilon|$ の大きいほうの対数を与える特異な関数である。$g(\varepsilon)$ の振舞がわかったので、一次摂動での緩和時間の計算と同様の計算を行うことができる。(12) 式と (13) 式にそれぞれ対応して、摂動の二次まででの遷移確率について、

$$W[(k,\uparrow) \to (k',\uparrow)] = \frac{2\pi}{\hbar}\left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 S_z^2(1 + J_{\mathrm{eff}}g(\varepsilon_k))^2\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) \tag{52}$$

$$W[(k,\uparrow) \to (k',\downarrow)] = \frac{2\pi}{\hbar}\left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 S_-S_+(1 + J_{\mathrm{eff}}g(\varepsilon_k))^2\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) \tag{53}$$

が得られるので、(14) 式や (15) 式と同様に局在スピン演算子についての平均を行うと、摂動の二次まででの緩和時間 $\tau(\varepsilon_k)$ の逆数は、

$$\frac{1}{\tau(\varepsilon_k)} = \frac{2\pi}{\hbar}\rho(\varepsilon_k)\left(-\frac{J_{\mathrm{eff}}}{2N}\right)^2 S(S+1)(1 + J_{\mathrm{eff}}g(\varepsilon_k))^2 \tag{54}$$

となる。電気伝導度の計算を (18) 式と同様に繰り返そう。定数を無視すれば $g(0) \simeq \rho\ln(k_{\mathrm{B}}T/D)$ となることに注意して（Fermi 準位をエネルギー原点に取っていることに注意せよ）、

$$\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{B}}(1 + J_{\mathrm{eff}}\rho\ln\frac{k_{\mathrm{B}}T}{D})^{-2} \tag{55}$$

と計算できる。σ_{B} は、(18) 式で得られた、第一 Born 近似での値である。

最終的に、電気抵抗は次のように計算される。

$$R(T) \simeq R_{\mathrm{B}}(1 + 2J_{\mathrm{eff}}\rho\ln\frac{k_{\mathrm{B}}T}{D}) \tag{56}$$

$J_{\mathrm{eff}} < 0$ であるので、この $R(T)$ は、$k_{\mathrm{B}}T \sim D$ 程度の高温での値 R_{B} から、温度が下がるにつれて、$-\ln(k_{\mathrm{B}}T/D)$ に従って増加することになる。格子の熱振動からの電気抵抗が T^5 に比例することと合わせて考えると、ある温度で、電気抵抗が極小値を持つことになる。以上が、近藤による、電気抵抗極小効果の説明である。振り返ってみれば、電気抵抗の対数異常は、スピン演算子の非可換性と Fermi 面の存在によるものであることがわかる。則ち、電気抵抗極小効果は本質的な量子多体効果によるものである。

また、s-d 混成の機構（Anderson モデル）との関連を再考してみると、電気抵抗極小現象が起きるためには、s-d 交換相互作用 (4) 式の J_{eff} が負、つまり、伝導電子スピンと局在スピンとが反強磁性的に相互作用することが必要である。そして、実際、Anderson モデルの有効ハミルトニアンとして導出される s-d 交換相互作用は反強磁性的である。このことは、$3d$ 遷移金属希薄合金における s-d 交換相互作用が Anderson モデルに基づくものであることの証拠と考えることができる。

全電気抵抗を改めて $R(T)$ と書くと、$R(T)$ は、格子の熱振動からの項（係数を a とする）と s-d 交換相互作用による対数項 (係数を $R_1 > 0$ とする）と不純物による残留抵抗 (R_0 とする）から、次のように表される。

$$R(T) = aT^5 + cR_0 - cR_1 \ln T \tag{57}$$

ここで、c は不純物濃度である。電気抵抗が極小になる温度を T_{min} とすれば、$T = T_{\mathrm{min}}$ で $R(T)$ の T の微係数がゼロとなることから、

$$\left.\frac{dR(T)}{dT}\right|_{T=T_{\mathrm{min}}} = 5aT_{\mathrm{min}}^4 - cR_1 \frac{1}{T_{\mathrm{min}}} = 0 \tag{58}$$

つまり、

$$T_{\mathrm{min}} = \left(\frac{R_1}{5a}\right)^{\frac{1}{5}} c^{\frac{1}{5}} \tag{59}$$

が得られる。不純物濃度の 1/5 乗に比例するので、T_{min} はあまり不純物濃度に依らない。これは、極少量の不純物によっても、かなり高温 ($10 \sim 20$K) に電気抵抗の極小が見られる実験事実とも対応している。