

第10回 分散分析その3 実験計画・乱塊法・ラテン方格法

A. 実験計画法

実験といってもいろいろある。

農業，工業，医学，マーケティング調査などばらつきのあるデータ，すなわち実験を繰り返すと同じ結果が得られるというわけではない実験を行うときに実験計画学を利用する。したがって，ロケットの打ち上げ実験のように失敗するか成功するかしかないような実験や水素と酸素を合成して水を作るように必ず同じ結果となる実験は実験計画学の対象ではない。

実験計画学の対象である実験の2つの特徴

いろいろな条件を人為的に設定して，その結果の比較を目的とする実験である。

同じ条件の下で実験を繰り返しても，結果（データで表される）はかならずしも一定ではなく，かなりのばらつきを示す。

次の実験について， ， について考えてみよう。

水稻の栽培実験

どんな条件を人為的に設定できるだろうか？

結果はどのようにばらつくか？

実験計画学はこのような特徴を持つ実験を対象にして，それから導かれる判断を的確にし，かつ一定の費用・労力の下で得られるべき情報量を最大にするための手法である。情報の質 目的に照らして適切な情報の種類 を決めるのは，その実験の目的とその分野での専門知識による。情報の量の方を取り扱う実験計画学でもその用いられる分野によって，個々の手法の用いられる割合，その結果の要約の仕方などに若干の違いが見られるが，しかし，基本的には一つの実験計画法として論じることができる。

B．因子と水準の選び方

1．因子と水準

一つの実験の結果の良否を判定するための特性値としては、作物の収量、製品の歩留まり、その品質特性を表す強度とか、ある成分の含有率などが取り上げられる。これらの特性値に影響を及ぼすと考えられる原因系を無数にふつうは考えることができる。これら多数の原因系の中で、当面の実験において、その条件を種々に変えて比較するものをとくに因子 (factor) とよび、その取る種々の条件を水準 (level) という。水準が量的な場合、その因子を量的因子といい、水準が質的な場合、その因子を質的因子という。

例：水稲の品種比較試験：因子 - 品種，3水準 - コシヒカリ，ハナエチゼン，ヒノヒカリ

合成樹脂工場における実験：因子 - 成型温度，4水準 - 130，140，150，160

マーケティングにおける実験：因子 - 広告媒体，3水準 - 新聞折込み，テレビ，インターネット

さらに2つ以上の因子を組み合わせた実験も考えられる。

例：2因子の実験

水稲の品種と施肥の実験：因子 - 品種，施肥法

3因子の実験

水稲の品種と施肥と作期の実験：因子 - 品種，施肥法，作期

練習：

トマトの糖度の向上させる実験をしたい。因子（質的因子と量的因子それぞれ）や水準を考えてみよう。

ニワトリの産卵数を増やす実験をしたい。因子（質的因子と量的因子それぞれ）と水準を考えてみよう。

2．因子の分類

特定の因子を実験に取り上げる目的およびその因子の性質に応じて、因子を次の4種に分類できる。

制御因子

その最適条件（水準）を知るために取り上げる因子で、実験の間ではもとより、その結論を適用すべき（生産の）場においても、その条件を制御できるもの。

例：水稲の品種比較試験であれば、品種が制御因子になる。

標示因子

その最適条件を知ることは直接の目的ではないが、この因子の水準が異なると、他の(制御)因子の最適条件が変わるおそれがある(交互作用がある)ために実験に取り上げる因子であって、実験の場では制御されなければならないが、適用の場では必ずしも制御できない。

例：水稲の品種試験において、作期が標示因子になることがある。作期は地域の事情によって自由に決められないことがあるが、作期と品種との交互作用があるために最適な品種は作期によって変わるから、作期についても因子として取り上げる必要がある。

ブロック因子

実験の精度を高めるために、実験の場の局所管理に用いる因子で、その水準自身は特性値に若干の影響を与えるかもしれないが、他の(制御・標示)因子とは交互作用を持たないと考えられるもの。

例：水稲の品種試験においては圃場のムラなどである。

層別因子

制御因子や標示因子と交互作用を持つおそれがあるが、実験の場でも適用の場でも制御できない因子。

例：水稲の品種試験では、年度、地域などの因子である。同じ品種でも年によって成績が違ってもあるし、地域によっても成績が異なるであろう。しかし、年度や地域は制御できない上に、品種との交互作用が認められる。

練習：トマトの糖度を高める実験で考えてみよう。

制御因子は何か？

ここで考えた制御因子に対して標示因子、ブロック因子、層別因子を考えてみよう。

ブロック因子について考えてみよう。

例えば使える圃場には傾斜があり、下の方が湿っているとしたら・・・

それ以外のブロック因子を考えてみよう。

C. 誤差の制御

1. 誤差の見積もりと制御

誤差を含んだ実験結果から，誤差を評価し，かつ誤差からできるだけ多くの情報を区別し，取り出すために分散分析を利用する．分散分析では

総変動 = 主効果による変動 + 交互作用による変動 + 誤差変動

にわけることができる．

分散分析では採用した因子の効果の有無を誤差変動の大きさに対して比較することによってF検定するから誤差を小さくできれば，検出力が高まる．

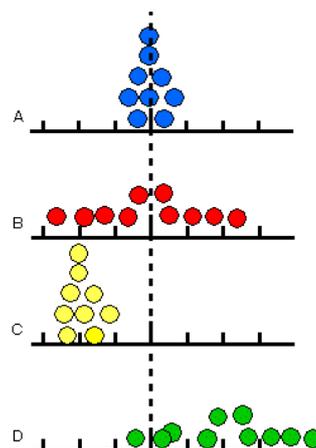
誤差の種類

() 誤差

方向性のない誤差であり，データの精密さに関わる誤差である．

() 誤差

方向性のある誤差であり，データのかたよりに関わる誤差である．



右の図は4人(A, B, C, D)が10回ある試料を分析した結果である．縦の点線が真の値である．もっともよい分析を行ったのは()であり，かたよりもなく，精密さも高い．ではBとCのどちらがよい分析をしたといえるだろうか？分析値の平均が真の値に近い点では()の方が，分析値のばらつきが小さい点では()の方が優れている．もし分析をいくらかでも行うことができるならば()の平均値の方がしだいに真の値に近づくであろう．もし何らかの方法で系統誤差を消去できれば()の方が少ない実験回数で真の値に近い測定値を得られると考えられる．すなわち偶然誤差は実験回数を多くすれば，(大きくなる，変わらない，小さくなる)のに対し，系統誤差は実験回数を多くすれば，(大きくなる，変わらない，小さくなる)．

精密さは偶然誤差を，かたよりは系統誤差を表し，正確さは真の値への近さであり，この2つの誤差を両方がふつつ関与する．

系統誤差とは？

測定結果に大きな影響を及ぼす偶然誤差にはどんなものがあるだろうか？圃場実験では畑の場所によって地力むらがある．このような系統誤差は実験する場の()な違いに由来する系統誤差である．測定する時間や日によって測定値がばらつくこともある．このような系統誤差は実験する場の()な違いに由来する系統誤差である．測定する個人によっても系統誤差が生じる．例えば，目盛りを読むとき，最小目盛りを十等分して読むことが一般的であるが，奇数より偶数を好む，5や0のようなきりのよい数字を好むなどによって系統誤差が生じる．あるいは測定対象自体の個体差に由来する系統誤差もある．数頭の牛に飼料実験を行う場合，体重，健康の程度などで系統的な誤差が生じる．

系統誤差をできるだけ小さくする

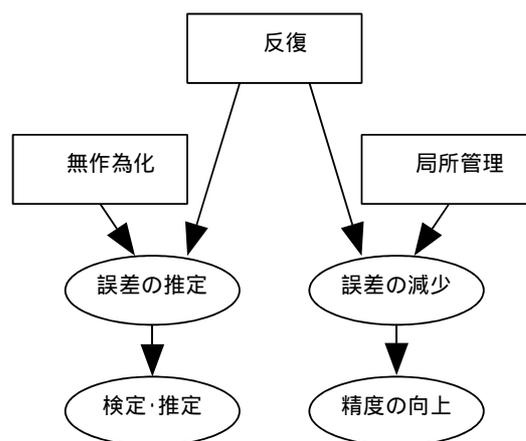
原因がわかっている場合 系統誤差を除去する ブランクテスト, 標準試料
局所管理 系統誤差をブロック間差として除去する

原因がわからない場合 無作為化 偶然誤差に転化する

2. 実験配置の三原則 (フィッシャーの三原則)

実験にともなう「誤差」を評価し, かつ実験の精度を上げるために R. A. フィッシャーは次の三原則を満足するように実験を計画しなければならないと提案した.

反復
無作為化
局所管理



反復

誤差を評価するためには1回だけの実験では不可能である. 2回以上の実験をしなければ誤差の評価はできない. さらに反復の回数を増やせば, 誤差をより正確に評価できるだけでなく, 誤差自体を小さくすることができる.

例えば, 平均 μ , 標準偏差 σ の母集団から n 個のデータを抽出したとする. n 個からなる標本の平均 m から母集団の平均を推定できる. n が十分に大きいときは, () 分布を利用して, 推定した平均に信頼区間を設定できる. n が小さいときは () 分布を代わりに使う.

標本の標準偏差を s とすると, 平均の誤差の程度を示す標準誤差は () であるから, n が大きくなるほど標準誤差は (大きく・小さく) なる. したがって, 標本数が多くなるほど誤差は正確に評価できるようになり, しかも小さくなる.

しかし, 反復数を多くすればするほどよいとは限らない. 同じ条件で繰り返した実験でない限り反復ではないから, 多数の実験を同じ条件ですることは困難になる. 工業製品では同じ条件で多数の製品を作ることもできようが, 農業では同じ条件をそろえること自体がなかなか難しい. したがって, 反復数には限度がある. どのぐらいの反復数がよいかは, 実験の精度がどの程度必要かによって決まるから一概にはいえない. 一般には誤差の自由度は 6~20 が適当とされる.

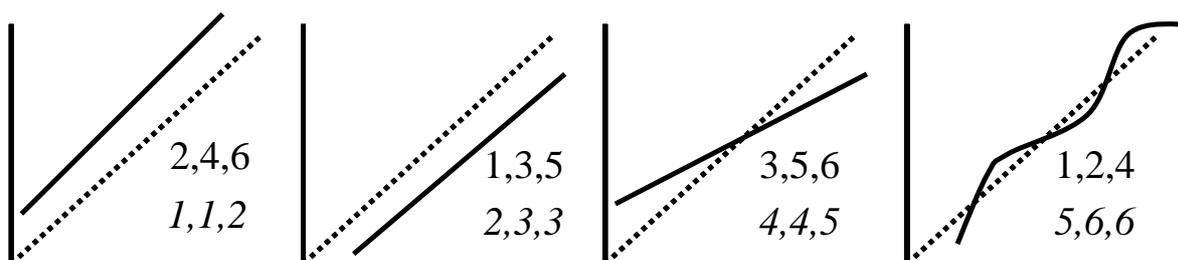
無作為化

実験の場は全体をできるだけ均一にしなければならない。しかし、現実には必ずしもそれが可能とは限らない。例えば、圃場実験では圃場のすべてが地力、温度、水などを全く均等にするというわけには行かない。工場でも1日の間の気温、湿度、あるいは機械を稼働してからどのくらいの時間が経過したかなどで、できる製品の具合は微妙に変わる可能性がある。分析でも、機器分析の場合、機械を稼働させてつねに安定しているとは限らず、機器によって分析値の変動の癖があるかもしれない。このような原因で起こる誤差は何らかの偏りや癖を持って現れる可能性がある。このような偏りや癖を持って現れる誤差を系統誤差という。

このような系統誤差を実験配置を無作為に行うことによって偶然誤差に転化させることを無作為化という。無作為化するには、さいころ、乱数サイ、乱数表、パソコンの乱数関数などが使える。どんな実験でも無作為化は基本である。

フィッシャーの三原則のうち、反復と無作為化を行ったものを完全無作為法とよぶ。

無作為化の例：6つのミカンの酸度を2回ずつ測定したい。4人の測定者には下の図のような測定傾向があった。



斜字体のようにミカンを割り当てるとどんな結果がえられるか？

したがって、ミカンの割り当てを無作為化する。このことによって、測定者のちがいによる系統誤差がどのミカンに当たるかが偶然の結果となるので、系統誤差を偶然誤差にすることができる。

局所管理

実験の場全体を均一にはできなくても、その一部を均一にすることは可能である。反復数を増やして誤差を減らそうとすると、反復を増やした結果実験全体を均一にできないためにかえって誤差が増える可能性がある。この場合、反復数を増やすときに各反復をその中の均一にした部分（かたまり、ブロック）に当てることで、系統誤差を除去することができる。

無作為化は実験の場にある系統誤差を偶然誤差にすることによって、測定の精度を高める方法であるが、局所管理はさらにそれより強力であり、実験の場にある系統誤差をブロックの差にすることによって、処理間差から消去することによって、測定の精度を高める方法である。

例：水田の地力 水田の地力が同じところを1つのブロックにする

柿園 樹齢の同じ（あるいは近い）ものを1つのブロックにする

機器分析 午前と午後でそれぞれ1つのブロックにする

D. 乱塊法

1. 完全無作為法から乱塊法へ

12頭の子豚(体重順に1~12番)に3種類(A, B, C)の餌を与える処理について, フィッシャーの三原則を適用してみよう. 完全無作為法では12頭にランダムにA, B, Cを割り当てる. 例えば下の表のようになったとする.

豚番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
乱数	5	3	1	12	7	2	9	8	4	6	11	10
処理	B	A	A	C	B	A	C	B	A	B	C	C

このような完全無作為法で得られたデータは一元配置の分散分析で処理間に差があるのかを検定できる.(完全無作為法による二元配置も可能である)

しかし, 事前に子豚の体重がわかっており, さらに餌の効果は体重によって異なることもわかっているなら, 体重の近いものを1つにまとめて, そのブロック内でA, B, Cを1つずつ割り当てた方が精度が向上する. すなわち体重順にブロック1(1~3), ブロック2(4~6), ブロック3(7~9), ブロック4(10~12)とし, 各ブロック内ではランダムにA, B, Cを割り当てる.

ブロック	1			2			3			4		
豚番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
乱数	3	2	1	2	1	3	1	2	3	3	1	2
処理	C	B	A	B	A	C	A	B	C	C	A	B

このように局所管理された(ここでは体重をなるべく同じになるように局所管理した)ブロックを作り, ブロック因子以外の系統誤差を偶然誤差に転化するためにブロック内では無作為に配置する方法を乱塊法という.

乱塊法の例: 水稻の品種試験

工場の製品

ブロック1~3, 品種A~Eの水稻品種試験



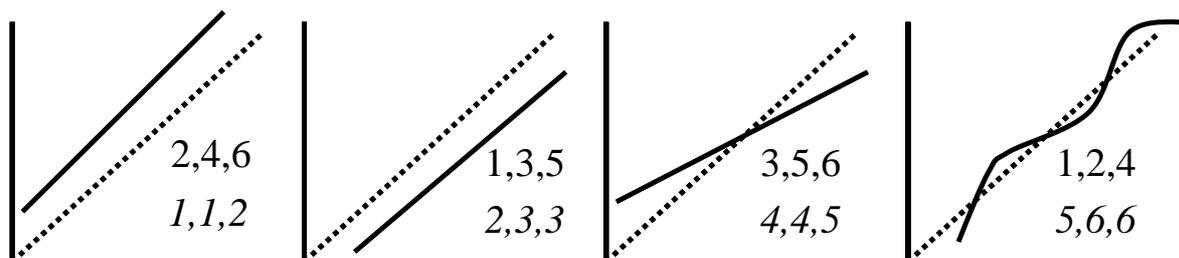
ブロック第1~3日目, 反応温度A~Dの製品製造試験



2. 乱塊法での分散分析

乱塊法での分散分析は二元配置と同じように行える。二元配置の因子の一つがブロック因子であると考えればよい。ただし、ブロック因子は制御因子や標示因子と交互作用があっては行けない。もしそのようなブロック因子があれば、そのブロック因子は標示因子あるいは層別因子として実験をやり直すべきである。

なぜブロック因子と制御因子の間に交互作用があってはならないか？実は、先ほどのミカンの例では実験者によっては交互作用が生じる可能性がある。



次の5品種の水稲の収量実験 (kg/10a) について、乱塊法での分散分析を行う。

処理 品種	ブロック				合計	平均
	I	II	III	IV		
A	725	650	682.5	662.5	2720	680
B	680	642.5	670	677.5	2670	667.5
C	710	652.5	590	637.5	2590	647.5
D	545	487.5	565	532.5	2130	532.5
E	515	430	392.5	502.5	1840	460
合計	3175	2862.5	2900	3012.5	11950	
平均	635	572.5	580	602.5		597.5

分散分析表						
変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値
行	149350	4	37337.5	34.00759013	1.85E-06	3.25916
列	11812.5	3	3937.5	3.586337761	0.046571	3.4903
誤差	13175	12	1097.917			
合計	174337.5	19				

分散分析の結果から、処理間に 1%の有意水準で有意差が認められた。さらにブロック間にも 5%の有意水準で有意差があったので、ブロックにすることで実験の誤差が減少し、実験の精度が向上したことがわかる。

E. ラテン方格法

1. 2つのブロック因子があった場合

考慮すべきブロック因子が2つあった場合はラテン方格法によってブロック因子を制御因子の各水準に均等に割り当てることができる。

例えば、右の例では5種類の入浴剤(A~E)の効果テストを5人の被験者(B1~B5)で5種類の浴槽(1~5)について行ったものである。こうすると5種類の入浴剤はそれぞれ各被験者、各浴槽に1つずつ割り当てられるので被験者や浴槽の差がなくなると考えられる。

さらにブロック内では無作為に配置することで、その他の未知の系統誤差を偶然誤差に転化できる。

		被験者(ブロック)				
		B1	B2	B3	B4	B5
浴槽 (ブロック)	1	A	E	C	D	B
	2	E	C	A	B	D
	3	B	D	E	C	A
	4	D	A	B	E	C
	5	C	B	D	A	E

2. ラテン方格法の実際

ラテン方格法での実験配置

ラテン方格法では処理の水準と同じ数だけのブロックの水準をそれぞれ必要とする。例えば、入浴剤の例では入浴剤が3種類、すなわち3水準の処理であれば、被験者のブロックも浴槽のブロックも3水準が必要である。そして、考えつく限りのラテン方格からランダムに1つのラテン方格を選んで実験を配置する。

しかし、実際には2×2のラテン方格は2つしかないのに対し、5×5になると161280個もあるから、下のように標準方格を1つ書き出し、その列と行をそれぞれ無作為化して、入れ替えることによって、ランダムなラテン方格を選ぶ。

	1	2	3	4	5		5	1	4	2	3		5	1	4	2	3
1	A	B	C	D	E	1	E	A	D	B	C	3	B	C	A	D	E
2	B	C	D	E	A	2	A	B	E	C	D	1	E	A	D	B	C
3	C	D	E	A	B	3	B	C	A	D	E	5	D	E	C	A	B
4	D	E	A	B	C	4	C	D	B	E	A	2	A	B	E	C	D
5	E	A	B	C	D	5	D	E	C	A	B	4	C	D	B	E	A

標準方格 → 列の無作為化 → 行の無作為化

ラテン方格法での分散分析
先述した入浴剤の効果の試験について、ラテン方格法で実施し、右のようなデータを得たとしよう。

C \ B		浴槽(列)					行計
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	
被験者 (行)	C ₁	D 4	B 2	A -4	E -2	C 5	5
	C ₂	A 0	C 1	E 0	B -3	D -2	-4
	C ₃	E 5	D -1	C 3	A -5	B 3	5
	C ₄	B 6	E 3	D -1	C 3	A -3	8
	C ₅	C -1	A -2	B 1	D 0	E 2	0
列計		14	3	-1	-7	5	14
処理名		A	B	C	D	E	
処理計		-14	9	11	0	8	14
処理平均		-2.8	1.8	2.2	0	1.6	0.56

2元配置の分散分析に比べて、ラテン方格法では3元配置になるので、計算は面倒になる。しかし、原理的なものは変わらないので、説明は省く(エクセルでは3元配置の分散分析はできないのでほかのソフトで統計解析する)。上のデータから次のような分散分析表を得る。

変動因	自由度	平方和	分散 (平均平方)	分散比 F値
全体	24	214.16		
処理	4	84.56	21.14	4.01*
ブロック(被験者)	4	48.16	12.04	2.28
ブロック(浴槽)	4	18.86	4.54	—
誤差	12	63.28	5.27	

分散分析の結果から入浴剤間には有意水準5%で有意差があると判定できた。さらに被験者のブロックは5%水準では有意差はなかったが、誤差よりも大きな分散であり、被験者をブロックにして、誤差を減少できたことがわかる。一方、浴槽のブロックによる変動は誤差と同じくらいの大きさしかなく、浴槽の違いはブロック因子にするほどの変動をもたらすものではないことがわかった。

3. ラテン方格法の特徴と問題点

実験の規模が大きくなりやすい

ラテン方格法では制御因子の数だけ行と列のブロックが必要になるので、制御因子が5水準だと5×5のラテン方格が必要となり、25もの区を実験しなければならなくなる。制御因子が6水準だと36である。このような数をこなすことは大変なので、一部だけを行う方法も存在する。

データの欠測は好ましくない

ラテン方格ではデータが欠けると分散分析の精度にかなり影響する。

制御因子の水準数が少ないラテン方格法は検出力の点でそれほど有利ではない

ラテン方格法では列と行の2つのブロック因子に自由度をさくので、誤差の自由度が小さくなり、F検定での検出力が小さくなる。したがって、制御因子の水準数が4以上ある方がよい。

4. 系統誤差と無作為化・局所管理

系統誤差の原因をすべて把握し、除去することは不可能なので、無作為化はどんなときでもかならずしなければならない。

系統誤差の原因が知られているならば局所管理でかなりの程度除去することができる。しかし、複数の系統誤差の原因があるときはそのうちいちばん誤差の大きくなるものを乱塊法あるいは2つをラテン方格法で除去する。

の局所管理で除去しない系統誤差は無作為化で偶然誤差に転化する。

F. 宿題

1. 次の実験を配置せよ。

3品種(A, B, C)の水稻の収量比較を4ブロックの乱塊法で実験する。

樹齢(3, 6, 9, 12年)と圃場の高低(高, 中, 低, 底)の2つのブロック因子によって、柿の4つの栽培方法(A, B, C, D)を比較する実験を行う(樹齢と栽培方法には交互作用がないとする)。

2. これまでに二元配置の分散分析までを学んできた。二元配置では因子は2つであるが、因子数をさらに多くしても分散分析は可能であり、3つ以上の因子がある場合は、多元配置と呼ぶこともある。因子数が4つ以上の実験を考えてみよ。それぞれの因子について、制御因子、標示因子、ブロック因子、層別因子のどれかを考えてみよ。さらに仮にこの4つ以上の因子すべてにそれぞれ交互作用があるとしたら、どのような交互作用が考えられるかをすべて書き出してみよ。

例(ただしこの例では因子数は3つしかない): 水稻の施肥実験で窒素の施肥の有無、リン酸の施肥の有無、カリの施肥の有無の3つの因子で実験した。交互作用は窒素とリン酸、窒素とカリ、リン酸とカリ、窒素とリン酸とカリの4種類が考えられる。