生物統計学
2010 年 12 月 14 日

第１０回　分散分析その１　一元配置

Ａ．分散分析とは？

１．３つ以上の標本平均から母平均が異なるかを同時に比較したい

例：ウズラの成長がよくなるという薬Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄのうち，どれが効果があるかあるいはないかを比較したい．したがって，対照区（コントロール，薬を与えない区），Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄの５つを比較することになる．処理：薬，水準：５つである．

次のような結果を得た．

処理	対照区	A	B	C	D
	90.87	97.81	80.23	81.20	87.77
	82.20	79.80	75.16	94.13	89.71
	93.89	91.13	80.44	77.75	98.51
	84.56	87.61	86.72	80.48	90.17
	81.43	93.40	79.53	80.91	89.17
平均	86.59	89.95	80.42	82.89	91.07
標準偏差	5.52	6.78	4.13	6.43	4.26
（単位 g）					

①　一番値の高いものと次に高いもの，２番目に高いものと３番目に高いものを次々とｔ検定すればよいのか？

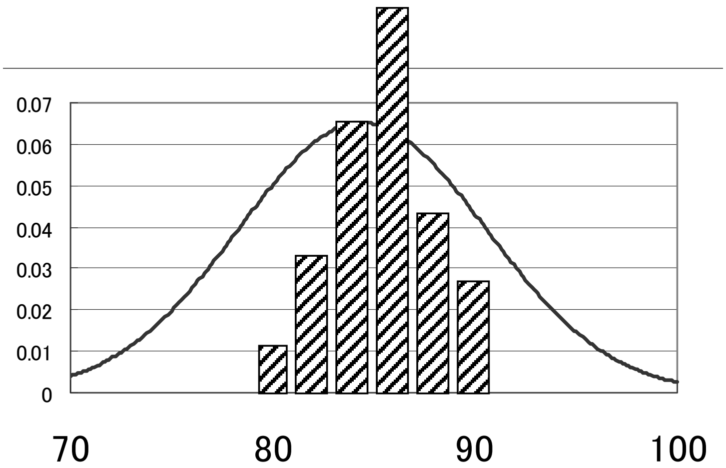
ｔ検定をいくども行う問題点

ｔ検定は決められた一組のデータについて行うと，決められた有意水準のもとで帰無仮説が棄却できるかを検討できる．上のように５つのデータセットの場合，$_5C_2$＝１０回のｔ検定をすることになる．したがって，全体で見たら有意水準（危険率）は５％以上になってしまう．

同一の正規分布から 10 個のデータを次々と取って, 一番平均の大きいものと一番平均の小さいものを選び，ｔ検定するとどうなるか？　20 回データを取ったときに実験すると・・・

★　ウズラの雄の体重の模擬実験

1000 羽のウズラ（平均体重 84.43g, 標準偏差 6.12g）のデータから無作為（ランダム）に 10 羽を選んで，平均と標準偏差を計算した．



一番平均の大きいものと一番平均の小さいものを t 検定すると，５％の有意水準で有意差があった．

標本番号	平均	標準偏差
1	82.60	6.41
2	82.91	8.43
3	**82.29**	**6.28**
4	82.98	4.98
5	83.09	6.36
6	84.29	6.26
7	85.62	5.41
8	85.33	7.55
9	84.22	3.97
10	**88.56**	**4.31**
11	84.04	5.12
12	83.65	5.26
13	85.41	5.52
14	84.42	6.56
15	84.18	4.94
16	83.67	6.05
17	84.91	7.59
18	84.39	6.53
19	86.19	4.92
20	84.81	4.77

標本3	標本10
92.02423	93.73479
72.88639	86.82815
82.21039	90.65504
91.78009	94.22085
80.89326	81.17397
77.99549	88.50729
75.40353	86.08846
81.17865	88.59314
82.80685	92.34257
85.74454	83.47703

t-検定：等分散を仮定した2標本による検定

	標本3	標本10
平均	82.29234191	88.56212777
分散	39.38938075	18.55804667
観測数	10	10
プールされた分散	28.97371371	
仮説平均との差異	0	
自由度	18	
t	-2.604567564	
P(T<=t) 片側	0.00896318	
t 境界値 片側	1.734063062	
P(T<=t) 両側	0.01792636	
t 境界値 両側	2.100923666	

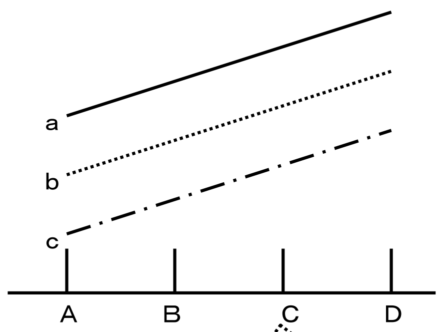
すなわち，処理の効果がなかったとしても，同じ母集団から何回も標本をとり，もっとも差がある２つの標本を t 検定すれば，平均に有意差があるという結果が得られるかもしれない．あるいは 20 種類の効果のない薬を同時に実験すれば，どれか２つの薬の間には有意差があるかもしれない．

２．２つ以上の要因を同時に比較したい

例：ウズラの成長がよくなる薬Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄはえさと混ぜると効果が高いかもしれない．そう考えて，麦わら，稲わら，濃厚飼料の３種類と組み合わせて試験をすることを考えた．処理は２つ，薬と飼料であり，薬は５水準，飼料は３水準ある．このとき比較するべき試験は，薬Ａ＋麦わら，薬Ａ＋稲わら，薬Ａ＋濃厚飼料，薬Ｂ＋麦わら，薬Ｂ＋稲わら，薬Ｂ＋濃厚飼料，薬Ｃ＋麦わら，薬Ｃ＋稲わら，薬Ｃ＋濃厚飼料，薬Ｄ＋麦わら，薬Ｄ＋稲わら，薬Ｄ＋濃厚飼料，対照区＋麦わら，対照区＋稲わら，対照区＋濃厚飼料となる．

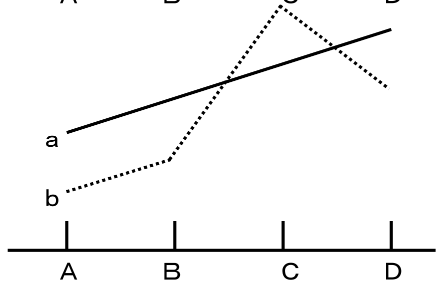
薬Ａでは稲わらが一番よいえさだったが，薬Ｂでは麦わらが一番よいえさだったという結果が出るかもしれない．ｔ検定では２つの要因が絡み合った結果を解析できない．2 つ以上の要因が絡んだ結果（　　　　　　　　　　　）はｔ検定では解析できない．

交互作用がないときは右の図のように各処理の反応直線は平行関係にある

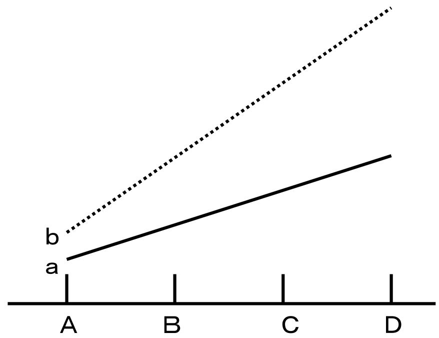


ｔ検定ではわからないこと　交互作用

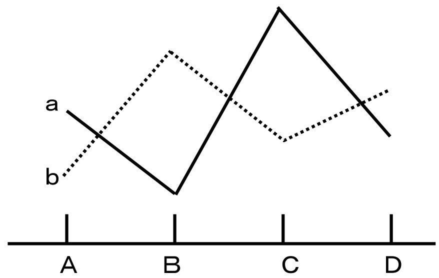
①　組み合わせの妙



②　相乗効果



③　打ち消しあう場合（干渉効果）



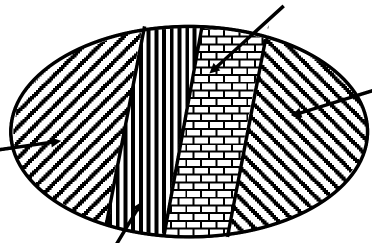
交互作用のあるときは１つの要因（処理）だけを見て結論づけるわけには行かない．要因（処理）の組み合わせを考える必要が出てくる．

３．ばらつき（分散）を偶然誤差と意味のあるものに分解する

処理の間の違い，交互作用は本当に意味のあるものなのか？（有意であるか？）

実験データのばらつきは処理によって生じたもの（意味のある部分）と誤差によるばらつき（意味のない部分）に分けることができる．

分散の加法性



データの総変動＝処理による変動＋誤差変動

＝個々の処理による変動（主効果）＋交互作用＋誤差変動

２つの標本の分散の検定　Ｆ検定

処理による変動が誤差による変動に比べて，十分に大きいのか（正確には処理による変動と誤差による変動は等しいという帰無仮説が棄却できるのか）を検討する．

Ｂ．分散分析の理論（一元配置の場合）

例：ハムスターをひまわり，大豆，人工餌の３種類のどれで育てるのが一番よいかを実験した．

①　実験結果に全く誤差がなく，餌の効果だけが現れたらどうなるか？

全く差がない場合，
実験結果は下のようになる

	ひまわり	大豆	人工餌
1	15	15	15
2	15	15	15
3	15	15	15
4	15	15	15
5	15	15	15

餌の効果に差があるなら，
（効果の合計=0）

	ひまわり	大豆	人工餌
1	0	−3	3
2	0	−3	3
3	0	−3	3
4	0	−3	3
5	0	−3	3

餌の効果に差があるなら，
（効果の合計=0）

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

② 実験結果に誤差がランダムに適当に混ざっているならばどうなるか？

餌の効果が誤差なく発揮されると
実験結果は下のようになる

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

誤差があるなら，
（誤差の合計=0）

	ひまわり	大豆	人工餌
1	2	3	1
2	0	0	−4
3	3	−2	−1
4	−3	0	−1
5	1	−2	3

左の２つを足すと
実験結果は下のようになる

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

誤差によって，データの処理による違いがわかりにくくなった．
餌の効果が±３に対して，誤差も±４もあるからである．

③ 得られた実験結果から誤差を分離してみる

実際に得られた実験結果は
下の通りである

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

列の合計
列の平均
列の効果

左の実験結果から列の平均を
それぞれ引くと誤差を分離できる

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

誤差の合計=0

④ 列の効果を判定する：誤差に比べて十分に大きいのか？

ばらつきのうち，誤差と効果によるものを分けて，比較してみよう（右の表）．

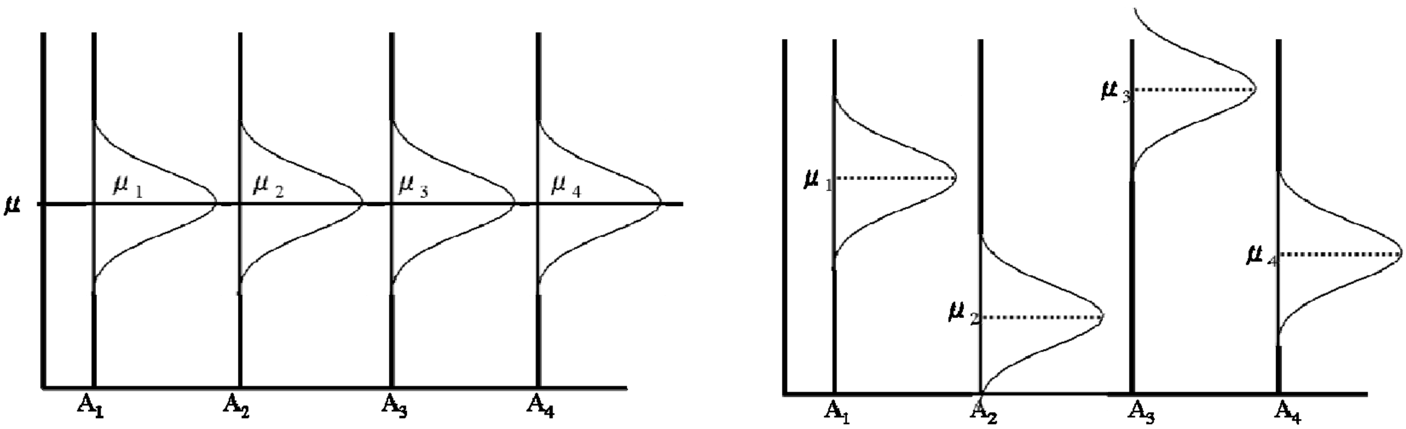
誤差と効果を比較する

	繰り返し	ひまわり	大豆	人工餌
効果	1			
	2			
	3			
	4			
	5			
誤差	1			
	2			
	3			
	4			
	5			

⑤　**分散分析**を行う：効果による変動が誤差による変動に比べて十分に大きいか？をＦ検定で検定する.

帰無仮説：　効果による変動と誤差による変動には差がない.
対立仮説：　効果による変動は誤差による変動よりも大きい.
誤差変動よりも処理の変動の方が大きいとかんがえてよいから片側検定となる.

上の帰無仮説のいうことは下の図のように読み替えることもできる



帰無仮説Ｈ$_0$の状態　　　　対立仮説Ｈ$_1$の状態

図　分散分析における帰無仮説と対立仮説

帰無仮説：$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$　どの水準でも母平均は同じである
対立仮説：水準（処理）間の母平均の**どれか一つは**異なる

分散分析では，次の分散比Ｆを計算し，この分散比が得られる確率 p−値を計算する（実際はエクセルなどのソフトがデータを入力しただけで p−値を計算する）

$$F = \frac{\text{効果のばらつきの大きさ}}{\text{誤差のばらつきの大きさ}} = \frac{\text{効果の分散}}{\text{誤差の分散}} = \frac{V_1}{V_2}$$

今回のデータの場合，Ｆ値は $F = \frac{V_1}{V_2} = \frac{43.4}{5.43} = 7.99$ となる（計算方法は省略，ホームページに参考のために掲載）.

このようなＦ値が得られる確率 p−値を計算すると，0.006229 であることから（片側検定），有意水準 1%で帰無仮説は棄却される．すなわち処理と誤差のばらつきには有意水準 1%で有意な差がある.

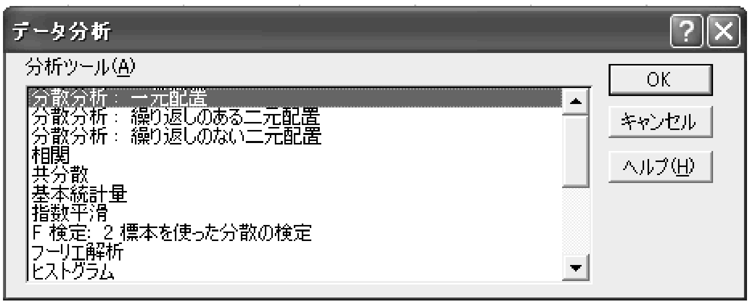
すなわちハムスターの成長は餌によって変化すると結論できる.

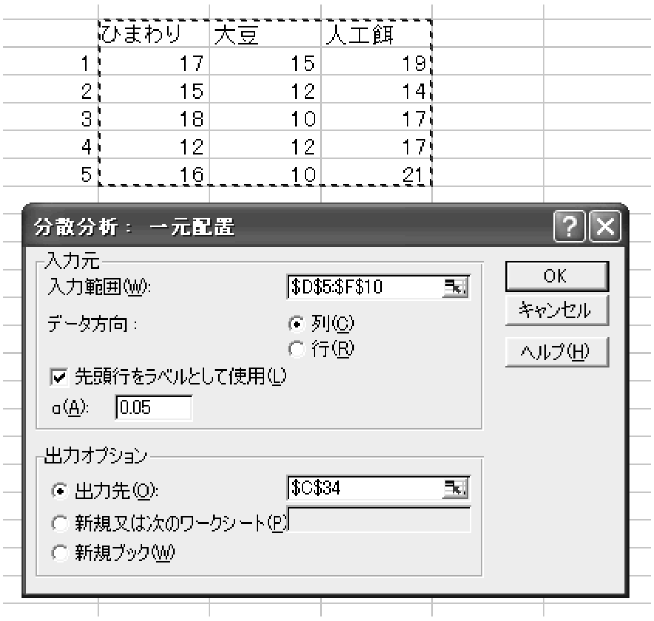
C．分散分析の実際（一元配置の場合）

1．エクセルでの分散分析

例：ハムスターをひまわり，大豆，人工餌の３種類のどれで育てるのが一番よいかを実験した．

	ひまわり	大豆	人工餌
1	17	15	19
2	15	12	14
3	18	10	17
4	12	12	17
5	16	10	21





分散分析：一元配置

概要

グループ	標本数	合計	平均	分散
ひまわり	5	78	15.6	5.3
大豆	5	59	11.8	4.2
人工餌	5	88	17.6	6.8

分散分析表

変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値
グループ間	86.8	2	43.4	7.987730061	0.006229	3.88529
グループ内	65.2	12	5.433333			
合計	152	14				

エクセルで分散分析するときはＦ値を調べる必要はない．p−値をみれば，帰無仮説が成り立つ場合，今回えられたようなデータが出現する確率（p−値）がわかる．p−値が 0.05 以下であれば有意水準 5%で帰無仮説は棄却され，処理間の母平均に差があること，すなわち処理によってハムスターの成長が変わったことが示される．

２．分散分析の結果の表現方法

分散分析の結果はふつう下のような表に書いて示す．（　）内はエクセルでの表現.

変動因	自由度φ（自由度）	平方和Ｓ（変動）	平均平方Ｖ（分散）	分散比Ｆ（観測された分散比）
処理間	ϕ_A	S_A	$V_A = S_A / \phi_A$	F_0
誤差	ϕ_E	S_E	$V_E = S_E / \phi_E$	
全体	ϕ_T	S_T		

さらに有意水準５％，１％で有意であればそれぞれ，*，**をF_0の右肩につけるのが慣習となっている．有意差が検出されなかったときは ns をつけることもある．

自由度と平方和には加法性がある．すなわち$\phi_T = \phi_A + \phi_E$，$S_T = S_A + S_E$

むかしは p-値の計算が難しかったので，ほとんど計算しなかったが，最近はコンピューターの発達で容易に計算できるようになった．そのため分散比（Ｆ値）の代わりに p-値を表に載せることも最近の論文ではときおり見かけるようになった．

３．分散分析の結果の意味

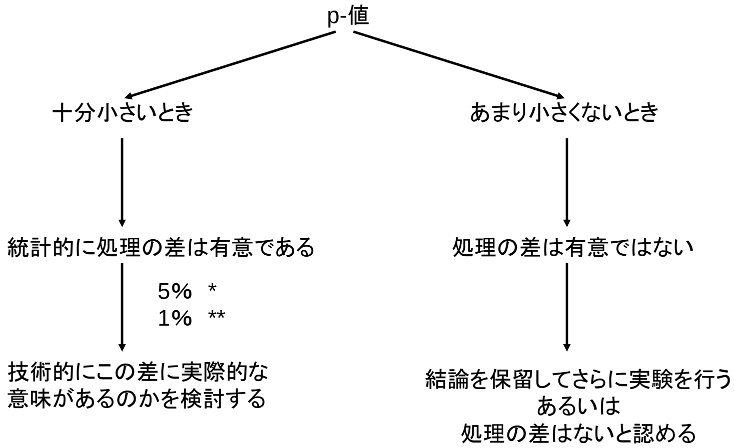
分散分析は処理（水準）間の母平均に差がないという帰無仮説を検定している

帰無仮説：$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$　どの水準でも母平均は同じである

対立仮説：水準（処理）間の母平均のどれか一つは異なる

したがって，分散分析の結果，有意差があることが分かった場合，その意味するところは，処理（水準）の中で一つは母平均の異なるものがある，すなわち処理によって変わるということである．一般的には一番値の小さいものと一番値の大きいものとの間には有意差があるということになる．それ以外の処理（水準）間に差があるかは分散分析ではわからない．これを調べるのは多重比較法である．

４．分散分析の結果の解釈



分散分析の結果，5%の有意水準で処理の効果が有意であれば，処理の効果があると結論できる．さらにより厳しい有意水準で有意であればより確信を持って処理の効果があると結論できる．なおより高い有意水準で有意である場合からといって，処理自体の効果が強いこととは関係がない．同じ実験でも標本数をたくさんとれば，より高い有意水準で有意であるという結果を得るかもしれないが，標本を増やしたからといって，処理の効果自体が強くなるということにはならない．

練習１：ウズラの成長がよくなるという薬A，B，C，Dのうち，どれが効果があるかあるいはないかを比較したい．したがって，対照区（コントロール，薬を与えない区），A，B，C，Dの５つを比較することになる．処理：薬，水準：５つである．

次のような結果を得た．ウズラの成長に対して，薬の効果があるかを分散分析せよ．

処理	対照区	A	B	C	D
	90.87	97.81	80.23	81.20	87.77
	82.20	79.80	75.16	94.13	89.71
	93.89	91.13	80.44	77.75	98.51
	84.56	87.61	86.72	80.48	90.17
	81.43	93.40	79.53	80.91	89.17
平均	86.59	89.95	80.42	82.89	91.07
標準偏差	5.52	6.78	4.13	6.43	4.26
（単位 g）					

帰無仮説：

対立仮説：

p−値＝

結論　有意水準（　　　）％で帰無仮説は（棄却される・棄却されない）．

したがって，薬によってウズラの成長量は（変わる・変わるとはいえない）．

練習２：D社はカーペットのダニの繁殖を抑制する薬を探索しており，5 種類の薬を供試した結果，右のような結果を得た．薬に効果があるかを分散分析せよ．

薬A	薬B	薬C	薬D	薬E
131	60	81	111	145
129	17	93	139	144
106	98	107	154	153
95	122	104	132	83
152	101	77	111	160
152	128	60	78	115

帰無仮説：

対立仮説：

検定結果：p−値＝

結論　有意水準（　　　）％で帰無仮説は（棄却される・棄却されない）．
　　　したがって，薬にはダニの繁殖抑制効果が（ない・ある・ないとはいえない・あるとはいえない）．

５．分散分析をする上での注意

① なるべく反復数はそろえる

今回学んだ一元配置の分散分析では反復数が個々の処理区で異なっていてもそれほど問題はない．しかし，来週以降に学ぶより複雑な分散分析では，反復数が異なると解析が面倒になるだけでなく，精度も大きく落ちてしまう．実験開始のときは反復数をそろえて実験するのが普通であるが，事故や不注意なので反復数がそろわなくなることもあるかもしれない．しかし，できるだけ反復のそろうように実験することが基本である．なお反復がそろわないからといって，一部のデータを削除するのは間違ったやり方である．

② 複雑な実験はなるべく避ける

前項とも関連するが，分散分析ではデータが複雑になるほど，解析が面倒かつ間違えやすくなる．特にコンピューターで計算させるときは，データの入力の仕方を間違いやすくなり，自分の目的とする分散分析をするにはデータの構造が複雑（あるいはでたらめ）で，解析不能ということもあり得る．そのうえ，反復がそろわなかったときの影響も大きくなる．必要のない複雑な実験は避けるのはもちろんのこと，必要だとしてもできるだけ簡単な実験計画にならないかをよく検討してから実験するべきである．実験計画を立てた時点で，どういう分散分析をするのかを決めておくのが正しい統計解析方法である．

③ 正規分布するデータが前提条件である

分散分析では比較する母集団それぞれが正規分布すること，母分散が等しいことが理論的には前提条件になる．しかし，分散分析は多少その前提条件からはずれていても，結果が大きく左右されない頑健性をもっている．

④ すべての水準に対して母分散が等しいことも前提条件である

水準ごとの反復数がみな同じである場合，この前提が多少崩れても影響はあまりない．

⑤ フィッシャーの３原則を満たした実験計画のもとで，分散分析を行う

誤差に系統誤差が入ると解析結果の妥当性が失われる危険性がある．系統誤差を除去する，あるいは分散分析の解析の妨害とならない偶然誤差に転化するのがフィッシャーの３原則に述べられた反復，無作為化，局所管理である．詳細は「実験計画と統計解析の実際」という講義で扱う．