

第9回 分散分析その1 一元配置

A. 分散分析とは？

1. 3つ以上の標本平均から母平均が異なるかを同時に比較したい

例：ウズラの成長がよくなるという薬A, B, C, Dのうち, どれが効果があるかあるいはないかを比較したい. したがって, 対照区 (コントロール, 薬を与えない区), A, B, C, Dの5つを比較することになる. 処理：薬, 水準：5つである.

次のような結果を得た.

処理	対照区	A	B	C	D
	90.87	97.81	80.23	81.20	87.77
	82.20	79.80	75.16	94.13	89.71
	93.89	91.13	80.44	77.75	98.51
	84.56	87.61	86.72	80.48	90.17
	81.43	93.40	79.53	80.91	89.17
平均	86.59	89.95	80.42	82.89	91.07
標準偏差 (単位 g)	5.52	6.78	4.13	6.43	4.26

① 一番値の高いものと次に高いもの, 2番目に高いものと3番目に高いものを次々と t 検定すればよいのか？

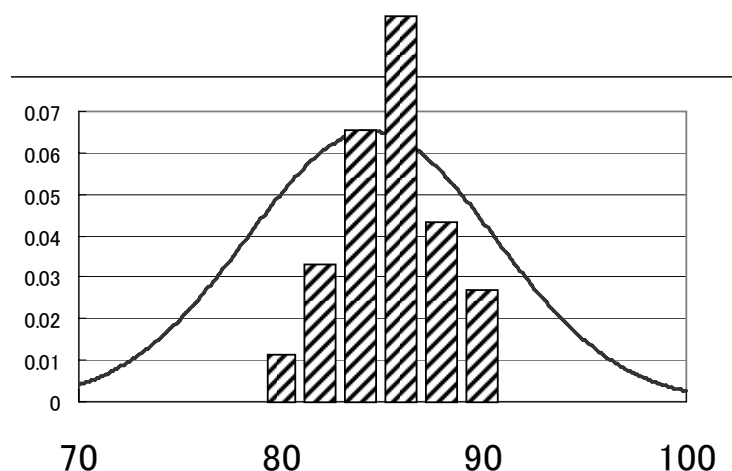
t 検定をいくども行う問題点

t 検定は決められた一組のデータについて行うと, 決められた有意水準のもとで帰無仮説が棄却できるかを検討できる. 上のように5つのデータセットの場合, ${}_5C_2 = 10$ 回の t 検定することになる. したがって, 全体で見たら有意水準 (危険率) は5%以上になってしまう.

同一の正規分布から10個のデータを次々と取って, 一番平均の大きいものと一番平均の小さいものを選び, t 検定するとどうなるか? 20回データを取ったときに実験すると・・・

★ ウズラの雄の体重の模擬実験

1000羽のウズラ (平均体重 84.43g, 標準偏差 6.12g) のデータから無作為 (ランダム) に10羽を選んで, 平均と標準偏差を計算した.



一番平均の大きいものと一番平均の小さいものを t 検定すると、5%の有意水準で有意差があった。

標本番号	平均	標準偏差
1	82.60	6.41
2	82.91	8.43
3	82.29	6.28
4	82.98	4.98
5	83.09	6.36
6	84.29	6.26
7	85.62	5.41
8	85.33	7.55
9	84.22	3.97
10	88.56	4.31
11	84.04	5.12
12	83.65	5.26
13	85.41	5.52
14	84.42	6.56
15	84.18	4.94
16	83.67	6.05
17	84.91	7.59
18	84.39	6.53
19	86.19	4.92
20	84.81	4.77

標本3	標本10	t-検定：等分散を仮定した2標本による検定	
92.02423	93.73479		
72.88639	86.82815		
82.21039	90.65504	平均	82.29234191 88.56212777
91.78009	94.22085	分散	39.38938075 18.55804667
80.89326	81.17397	観測数	10 10
77.99549	88.50729	プールされた分散	28.97371371
75.40353	86.08846	仮説平均との差異	0
81.17865	88.59314	自由度	18
82.80685	92.34257	t	-2.604567564
85.74454	83.47703	P(T<=t) 片側	0.00896318
		t 境界値 片側	1.734063062
		P(T<=t) 両側	0.01792636
		t 境界値 両側	2.100923666

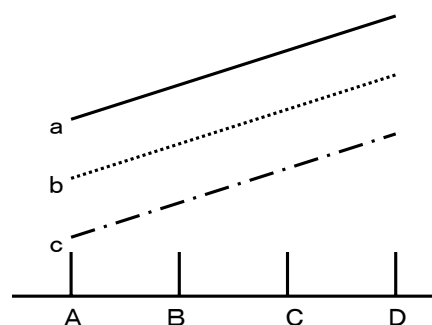
すなわち、処理の効果がなかったとしても、同じ母集団から何回も標本をとり、もっとも差がある2つの標本を t 検定すれば、平均に有意差があるという結果が得られるかもしれない。あるいは 20 種類の効果のない薬を同時に実験すれば、どれか 2 つの薬の間には有意差があるかもしれない。

2. 2つ以上の要因を同時に比較したい

例：ウズラの成長がよくなる葉A, B, C, Dはえさと混ぜると効果が高いかもしれない。そう考えて、麦わら、稲わら、濃厚飼料の3種類と組み合わせて試験をすることを考えた。処理は2つ、葉と飼料であり、葉は5水準、飼料は3水準ある。このとき比較すべき試験は、葉A+麦わら、葉A+稲わら、葉A+濃厚飼料、葉B+麦わら、葉B+稲わら、葉B+濃厚飼料、葉C+麦わら、葉C+稲わら、葉C+濃厚飼料、葉D+麦わら、葉D+稲わら、葉D+濃厚飼料、対照区+麦わら、対照区+稲わら、対照区+濃厚飼料となる。

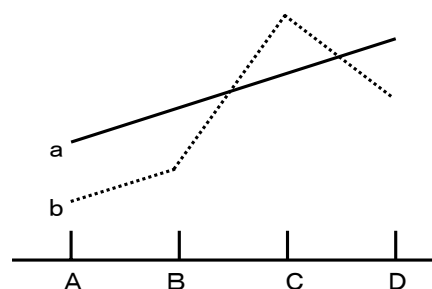
葉Aでは稲わらが一番よいえさだったが、葉Bでは麦わらが一番よいえさだったという結果が出るかもしれない。t検定では2つの要因が絡み合った結果を解析できない。2つ以上の要因が絡んだ結果（交互作用）はt検定では解析できない。

交互作用がないときは右の図のように各処理の反応直線は平行関係にある

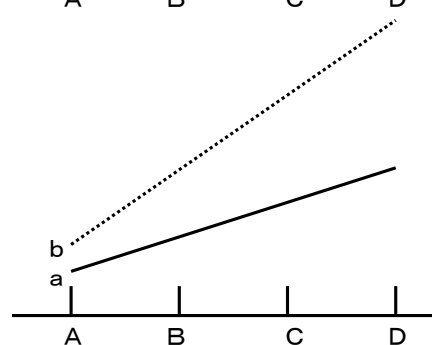


t検定ではわからないこと 交互作用

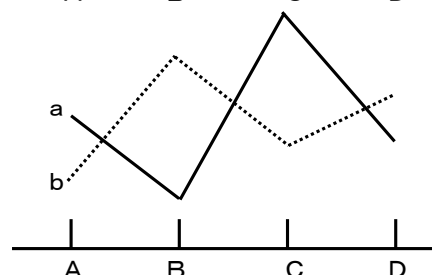
① 組み合わせの妙



② 相乗効果



③ 打ち消しあう場合（干渉効果）



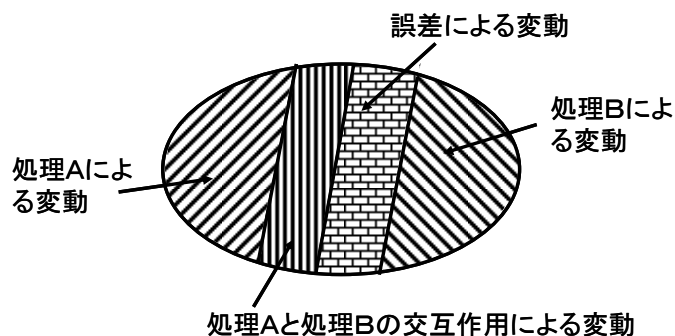
交互作用のあるときは1つの要因（処理）だけを見て結論づけるわけには行かない。要因（処理）の組み合わせを考える必要が出てくる。

3. ばらつき（分散）を偶然誤差と意味のあるものに分解する

処理の間の違い，交互作用は本当に意味のあるものなのか？（有意であるか？）

実験データのばらつきは処理によって生じたもの（意味のある部分）と誤差によるばらつき（意味のない部分）に分けることができる。

分散の加法性



データの総変動＝処理による変動＋誤差変動

＝個々の処理による変動（主効果）＋交互作用＋誤差変動

2つの標本の分散の検定 F検定

処理による変動が誤差による変動に比べて，十分に大きいのか（正確には処理による変動と誤差による変動は等しいという帰無仮説が棄却できるのか）を検討する。

B. 分散分析の理論（一元配置の場合）

例：ハムスターをひまわり，大豆，人工餌の3種類のどれで育てるのが一番よいかを実験した。

① 実験結果に全く誤差がなく，餌の効果だけが現れたらどうなるか？

全く差がない場合，
実験結果は下のようになる

餌の効果に差があるなら，
(効果の合計=0)

餌の効果に差があるなら，
(効果の合計=0)

	ひまわり	大豆	人工餌		ひまわり	大豆	人工餌		ひまわり	大豆	人工餌
1	15	15	15	1	0	-3	3	1			
2	15	15	15	2	0	-3	3	2			
3	15	15	15	3	0	-3	3	3			
4	15	15	15	4	0	-3	3	4			
5	15	15	15	5	0	-3	3	5			

② 実験結果に誤差がランダムに適当に混ざっているならばどうなるか？

餌の効果が誤差なく発揮されると
実験結果は下のようになる

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

誤差があるなら、
(誤差の合計=0)

	ひまわり	大豆	人工餌
1	2	3	1
2	0	0	-4
3	3	-2	-1
4	-3	0	-1
5	1	-2	3

左の2つを足すと
実験結果は下のようになる

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

誤差によって、データの処理による違いがわかりにくくなった。
餌の効果が±3に対して、誤差も±4もあるからである。

③ 得られた実験結果から誤差を分離してみる

実際に得られた実験結果は
下の通りである

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

列の合計
列の平均
列の効果

左の実験結果から列の平均を
それぞれ引くと誤差を分離できる

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

誤差の合計=0

④ 列の効果を判定する：誤差に比べて十分に大きいのか？

ばらつきのうち、誤差と効果によるものを分けて、比較してみよう（右の表）。

誤差と効果を比較する

	繰り返し	ひまわり	大豆	人工餌
効果	1			
	2			
	3			
	4			
	5			
誤差	1			
	2			
	3			
	4			
	5			

⑤ 分散分析を行う：効果による変動が誤差による変動に比べて十分に大きいのか？をF検定で検定する。

帰無仮説：効果による変動と誤差による変動には差がない。

対立仮説：効果による変動は誤差による変動よりも大きい。

誤差変動よりも処理の変動の方が大きいとかがえてよいから片側検定となる。

上の帰無仮説のいうことは下の図のように読み替えることもできる

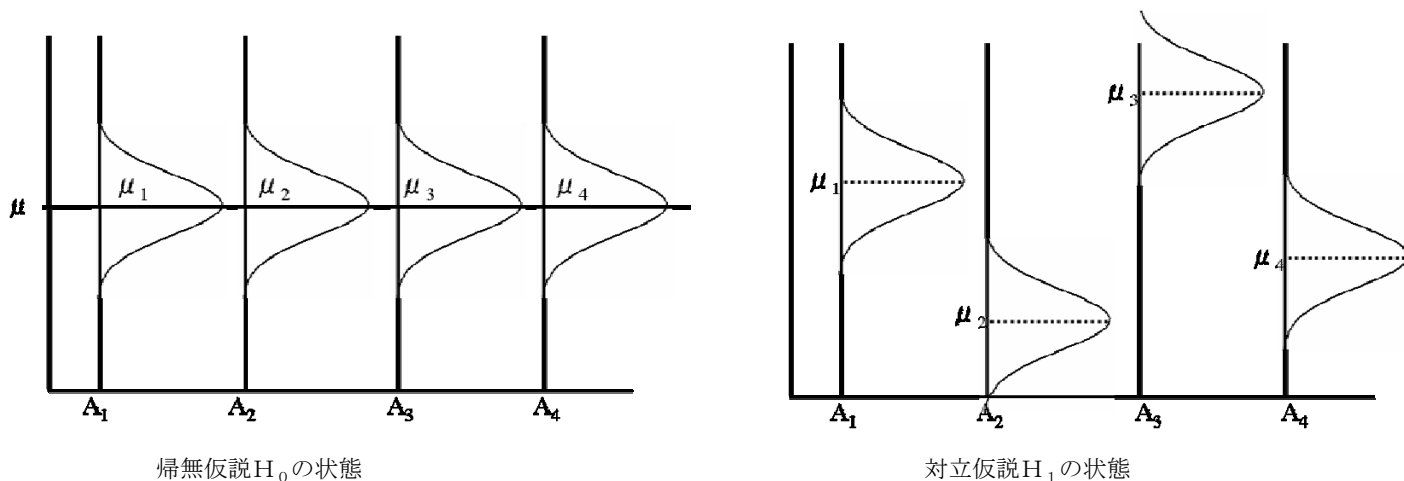


図 分散分析における帰無仮説と対立仮説

帰無仮説： $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ どの水準でも母平均は同じである

対立仮説：水準（処理）間の母平均のどれか一つは異なる

分散分析では、次の分散比Fを計算し、この分散比が得られる確率p-値を計算する（実際はエクセルなどのソフトがデータを入力しただけでp-値を計算する）

$$F = \frac{\text{効果のばらつき的大小}}{\text{誤差のばらつき的大小}} = \frac{\text{効果の分散}}{\text{誤差の分散}} = \frac{V_1}{V_2}$$

今回のデータの場合、F値は $F = \frac{V_1}{V_2} = \frac{43.4}{5.43} = 7.99$ となる（計算方法は省略、ホームページに

参考のために掲載）。

このようなF値が得られる確率p-値を計算すると、0.006229であることから（片側検定）、有意水準1%で帰無仮説は棄却される。すなわち処理と誤差のばらつきには有意水準1%で有意な差がある。

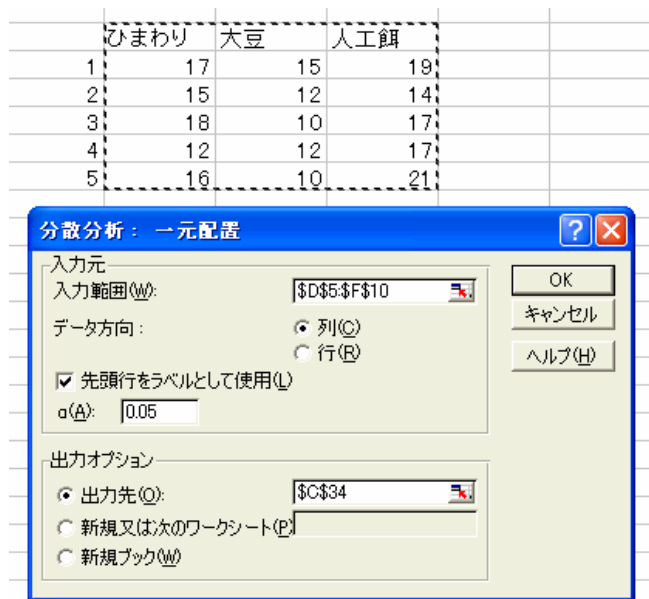
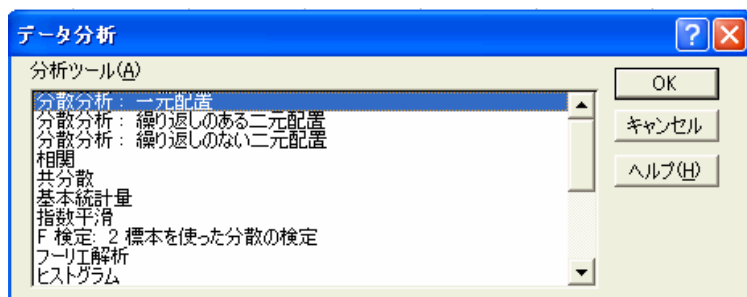
すなわちハムスターの成長は餌によって変化すると結論できる。

C. 分散分析の実際（一元配置の場合）

1. エクセルでの分散分析

例: ハムスターをひまわり, 大豆, 人工餌の3種類のどれで育てるのが一番よいかを実験した.

	ひまわり	大豆	人工餌
1	17	15	19
2	15	12	14
3	18	10	17
4	12	12	17
5	16	10	21



分散分析：一元配置				
概要				
グループ	標本数	合計	平均	分散
ひまわり	5	78	15.6	5.3
大豆	5	59	11.8	4.2
人工餌	5	88	17.6	6.8

分散分析表							
変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値	
グループ間	86.8	2	43.4	7.987730061	0.006229	3.88529	
グループ内	65.2	12	5.433333				
合計	152	14					

エクセルで分散分析するときにはF値を調べる必要はない。p-値をみれば、帰無仮説が成り立つ場合、今回えられたようなデータが出現する確率（p-値）がわかる。p-値が0.05以下であれば有意水準5%で帰無仮説は棄却され、処理間の母平均に差があること、すなわち処理によってハムスターの成長が変わったことが示される。

2. 分散分析の結果の表現方法

分散分析の結果はふつう下のような表に書いて示す。()内はエクセルでの表現.

変動因	自由度 ϕ (自由度)	平方和 S (変動)	平均平方 V (分散)	分散比 F (観測された分散比)
処理間	ϕ_A	S_A	$V_A = S_A / \phi_A$	F_0
誤差	ϕ_E	S_E	$V_E = S_E / \phi_E$	
全体	ϕ_T	S_T		

さらに有意水準 5%, 1% で有意であればそれぞれ, *, ** を F_0 の右肩につけるのが慣習となっている. 有意差が検出されなかったときは ns をつけることもある.

自由度と平方和には加法性がある.

$$\phi_T = \phi_A + \phi_E, \quad S_T = S_A + S_E$$

むかしは p-値の計算が難しかったので, ほとんどしなかったが, 最近はコンピューターの発達で容易となった. そのため分散比の代わりに p-値を表に載せることも最近の論文ではときおり見かけるようになった.

3. 分散分析の結果の意味

分散分析は処理 (水準) 間の母平均に差がないという帰無仮説を検定している

帰無仮説: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ どの水準でも母平均は同じである

対立仮説: 水準 (処理) 間の母平均のどれか一つは異なる

したがって, 分散分析の結果, 有意差があることが分かった場合, その意味するところは, 処理 (水準) の中で一つは母平均の異なるものがある, すなわち処理によって変わるということである. 一般的には一番値の小さいものと一番値の大きいものとの間には有意差があるということになる. それ以外の処理 (水準) 間に差があるかは分散分析ではわからない. これを調べるのは多重比較法である.

練習1：ウズラの成長がよくなるという薬A, B, C, Dのうち、どれが効果があるかあるいはないかを比較したい。したがって、対照区（コントロール、薬を与えない区）、A, B, C, Dの5つを比較することになる。処理：薬、水準：5つである。

次のような結果を得た。ウズラの成長に対して、薬の効果があるかを分散分析せよ。

処理	対照区	A	B	C	D
	90.87	97.81	80.23	81.20	87.77
	82.20	79.80	75.16	94.13	89.71
	93.89	91.13	80.44	77.75	98.51
	84.56	87.61	86.72	80.48	90.17
	81.43	93.40	79.53	80.91	89.17
平均	86.59	89.95	80.42	82.89	91.07
標準偏差 (単位 g)	5.52	6.78	4.13	6.43	4.26

帰無仮説：

対立仮説：

p-値＝

結論 有意水準（ ）%で帰無仮説は（棄却される・棄却されない）。

したがって、薬によってヤギの成長量は（変わる・変わらない）。

練習2：D社はカーペットのダニの繁殖を抑制する薬を探索しており、5種類の薬を供試した結果、右のような結果を得た。薬に効果があるかを分散分析せよ。

	薬A	薬B	薬C	薬D	薬E
	131	60	81	111	145
	129	17	93	139	144
	106	98	107	154	153
	95	122	104	132	83
	152	101	77	111	160
	152	128	60	78	115

帰無仮説：

対立仮説：

検定結果：p-値＝

4. 分散分析をする上での注意

① なるべく反復数はそろえる

今回学んだ一元配置の分散分析では反復数が個々の処理区で異なってもそれほど問題はない。しかし、来週以降に学ぶより複雑な分散分析では、反復数が異なると解析が面倒になるだけでなく、精度も大きく落ちてしまう。実験開始のときは反復数をそろえて実験するのが普通であるが、事故や不注意なので反復数がそろわなくなることもあるかもしれない。しかし、できるだけ反復のそろうように実験することが基本である。なお反復がそろわないからといって、一部のデータを削除するのは間違ったやり方である。

② 複雑な実験はなるべく避ける

前項とも関連するが、分散分析ではデータが複雑になるほど、解析が面倒かつ間違いやすくなる。特にコンピューターで計算させるときは、データの入力の仕方を間違いやすくなり、自分の目的とする分散分析をするにはデータの構造が複雑（あるいはでたらめ）で、解析不能ということもあり得る。そのうえ、反復がそろわなかったときの影響も大きくなる。必要のない複雑な実験は避けるのはもちろんのこと、必要だとしてもできるだけ簡単な実験計画にならないかをよく検討してから実験するべきである。実験計画を立てた時点で、どういう分散分析をするのかを決めておくのが正しい統計解析方法である。

③ 正規分布するデータが前提条件である

分散分析では比較する母集団それぞれが正規分布すること、母分散が等しいことが理論的には前提条件になる。しかし、分散分析は多少その前提条件からはずれていても、結果が大きく左右されない頑健性をもっている。

④ すべての水準に対して母分散が等しいことも前提条件である

水準ごとの反復数がみな同じである場合、この前提が多少崩れても影響はあまりない。

⑤ フィッシャーの3原則を満たした実験計画のもとで、分散分析を行う

誤差に系統誤差が入ると解析結果の妥当性が失われる危険性がある。系統誤差を除去する、あるいは分散分析の解析の妨害とならない偶然誤差に転化するのがフィッシャーの3原則に述べられた反復、無作為化、局所管理である。詳細は第11回の授業で学ぶ予定である。

D. 多重検定

1. 分散分析の結果でわかるのは、処理間に有意差があることだけである

下の例は、4種類の薬と対照区（薬を与えない処理）でウズラを育てたときの成長量を調べたものである。

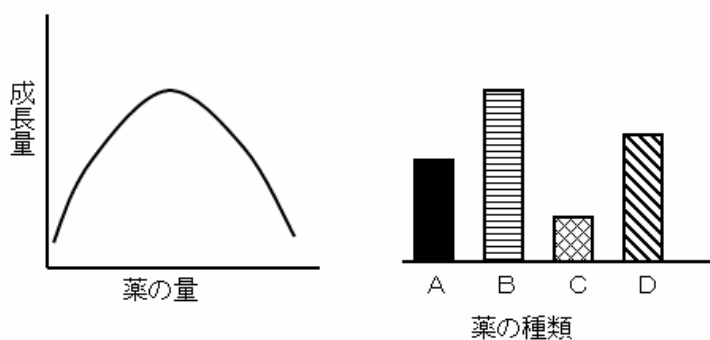
処理	対照区	A	B	C	D
	90.87	97.81	80.23	81.20	87.77
	82.20	79.80	75.16	94.13	89.71
	93.89	91.13	80.44	77.75	98.51
	84.56	87.61	86.72	80.48	90.17
	81.43	93.40	79.53	80.91	89.17
平均	86.59	89.95	80.42	82.89	91.07
標準偏差	5.52	6.78	4.13	6.43	4.26

分散分析表						
変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値
グループ間	411.5069	4	102.8767	3.365385823	0.029228	2.866081
グループ内	611.3815	20	30.56907			
合計	1022.888	24				

分散分析の結果、薬を与える処理は 5%の有意水準で有意であった。したがって、薬には効果があることがわかる。しかし、上の場合、A、B、C、Dそれぞれの薬が対照区より効果があるのか、あるいはそれぞれの薬の間に有意差があるのかは分散分析では検定できない。そのため対照区よりA、Dの薬の効果が有意に高いかは分散分析ではわからない。

3水準以上を同時に行った実験について、それぞれの水準について個々に差があるかどうかを検定する方法が多重検定である。なお水準が量的因子である場合には第13回で学ぶ回帰分析をする。量的因子であれば、実験で採用した水準そのものが最適な水準とは限らない。採用した水準と水準の間に最適な水準がある方がふつうである。そのような場合、水準と反応を回帰分析し、最適な水準を見つける。一方、質的因子では最適な水準は実験で採用した水準から選ぶことができる。

回帰分析(最適な量を知る) 多重検定(最適な水準を知る)



2. 多重検定

古くから使われた LSD 法は t 検定を繰り返して行う方法なので、実際にはすべての水準の組み合わせについて LSD 法で有意差を検定すると、その中のあるペアについて誤った判定をする確率は高くなる。このことからすべての水準の組み合わせについて同時に検定しながら、宣言した有意水準の範囲で第 1 種の誤りを抑えるような検定法が考えられている。これを多重検定という。しかし、多重検定には多数の手法があり、状況に応じて使い分ける必要がある。その上、専門家の間でもどれを使ったらよいかの意見の一致をかならずしも見ていない (Clewley and Scarisbrick, 2001)。ここではよく聞かれる多重検定を紹介するにとどめる。

① LSD 法 古くからよく使われた方法である。水準が 3 つのときは分散分析の結果、処理に有意な効果があると認められたときに LSD 法を使うことができる。

② テューキー法 (テューキーの HSD 法ともいう)

基本的な多重検定法で、水準間のすべての組み合わせについて検定を行う。

③ ダネット法

対照区と残りの水準という比較をするときに用いる方法。例えば、A～C の 3 種類の新薬の効果を調べるときに共通の対照区を 1 つ設けた実験ならば、ダネット法で検定できる。

①から③はどれも各水準間で分散が等しいことを仮定している。

多重検定した結果、各水準にそれぞれ有意差がある、あるいは有意差が認められなかった場合は以下のように記述するのが一般的である。

グループ	標本数	平均	
対照区	5	86.59076	b,c
A	5	89.94969	c
B	5	80.41799	a
C	5	82.89238	a
D	5	91.07009	c

同じ記号を記した値の間には、○○法で有意水準5%において有意差がない。

上の例の場合、○○法という多重比較法を使った結果、BとCの間には有意水準 5%において有意差がないが、AとBの間には有意差があることを示している。対照区と有意差のあるのは同じ符号を持たないBとCであり、bあるいはcの符号のついたA、Dとは有意差がない。

E. 宿題

1. 第8回の宿題5. で調べたデータについて分散分析せよ.
2. 次回の授業では二元配置の分散分析について学ぶ. 2つの処理を組み合わせたときのデータの解析方法である.
 - ① 産地と品種の違いがリンゴの糖度に及ぼす影響を知りたい.
 - ② 施肥量と品種の違いがイネの1穂穎花数に及ぼす影響を知りたい.
 - ③ 作期と品種の違いがトマトの酸度に及ぼす影響を知りたい.

二元配置で分散分析できそうなデータを自分で,あるいは数人のグループで調査,あるいは競技などをして集めよ. なお,データには反復が2つ以上あり,それぞれの処理で反復の数は同じにすること. データの配置は下の図のようになる.

産地と品種の違いがリンゴの糖度に及ぼす影響を各処理3つずつのリンゴで調査した.

産地: 青森, 長野, 山形, 品種: 紅玉, ふじ, むつ

	青森	長野	山形
紅玉	() () ()	() () ()	() () ()
ふじ	() () ()	() () ()	() () ()
むつ	() () ()	() () ()	() () ()

他にも次のような例が考えられる

コンビニ弁当の売れ行き 曜日, 天気 の2つの要因

イネの1穂穎花数 品種, 施肥 の2つの要因

小鳥のさえざる回数 気温, 太陽の明るさ の2つの要因

遠投距離 ボールの重さ, 個人差 の2つの要因

自転車競争 自転車の種類, 個人差 の2つの要因

金魚の餌摂取量 水温, 品種 の2つの要因

食塩水の沸騰時間 食塩水の濃度, 室温 の2つの要因

自動車の燃費 天気, 道路 (一般, 高速, 山道) の2つの要因