

第9回 分散分析その1 一元配置

A. 分散分析とは？

1. 3つ以上の標本平均から母平均が異なるかを同時に比較したい

例：ヤギの成長がよくなるという薬A, B, C, Dのうち、どれが効果があるかあるいはないかを比較したい。したがって、対照区（コントロール、薬を与えない区）、A, B, C, Dの5つを比較することになる。処理：薬, 水準：5つである。

次のような結果を得た。

処理	対照区	A	B	C	D
	100	105	96	100	115
	102	108	97	97	112
	104	110	100	95	100
	105	106	102	104	105
	103	104	99	103	106
平均	102.8	106.6	98.8	99.8	107.6
標準偏差	1.92	2.41	2.39	3.83	5.94

① 一番値の高いものと次に高いもの、2番目に高いものと3番目に高いものを次々とt検定すればよいのか？

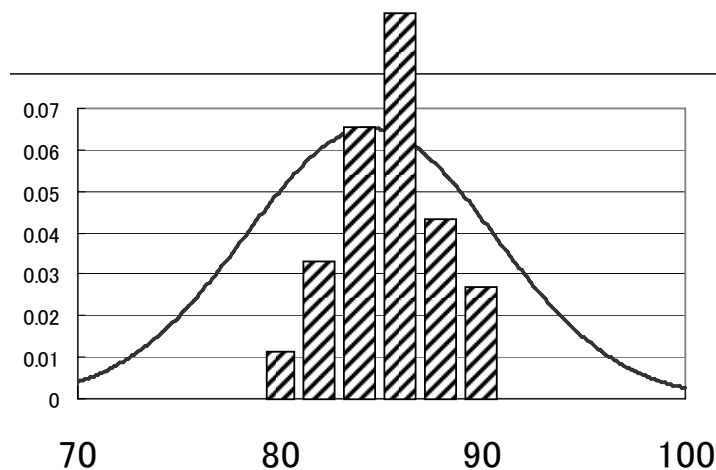
t検定をいくども行う問題点

t検定は決められた一組のデータについて行うと、決められた有意水準のもとで帰無仮説が棄却できるかを検討できる。上のように5つのデータセットの場合、 ${}_5C_2 = 10$ 回のt検定をすることになる。したがって、全体で見たら有意水準（危険率）は5%以上になってしまう。

同一の正規分布から10個のデータを次々と取って、一番平均の大きいものと一番平均の小さいものを選び、t検定するとどうなるか？ 20回データを取ったときに実験すると・・・

★ ウズラの雄の体重の模擬実験

1000羽のウズラ（平均体重84.43g, 標準偏差6.12g）のデータから無作為（ランダム）に10羽を選んで、平均と標準偏差を計算した。



一番平均の大きいものと一番平均の小さいものを t 検定すると、5%の有意水準で有意差があった。

標本番号	平均	標準偏差
1	82.60	6.41
2	82.91	8.43
3	82.29	6.28
4	82.98	4.98
5	83.09	6.36
6	84.29	6.26
7	85.62	5.41
8	85.33	7.55
9	84.22	3.97
10	88.56	4.31
11	84.04	5.12
12	83.65	5.26
13	85.41	5.52
14	84.42	6.56
15	84.18	4.94
16	83.67	6.05
17	84.91	7.59
18	84.39	6.53
19	86.19	4.92
20	84.81	4.77

標本3	標本10	t-検定：等分散を仮定した2標本による検定	
92.02423	93.73479		
72.88639	86.82815		
82.21039	90.65504	平均	82.29234191 88.56212777
91.78009	94.22085	分散	39.38938075 18.55804667
80.89326	81.17397	観測数	10 10
77.99549	88.50729	プールされた分散	28.97371371
75.40353	86.08846	仮説平均との差異	0
81.17865	88.59314	自由度	18
82.80685	92.34257	t	-2.604567564
85.74454	83.47703	P(T<=t) 片側	0.00896318
		t 境界値 片側	1.734063062
		P(T<=t) 両側	0.01792636
		t 境界値 両側	2.100923666

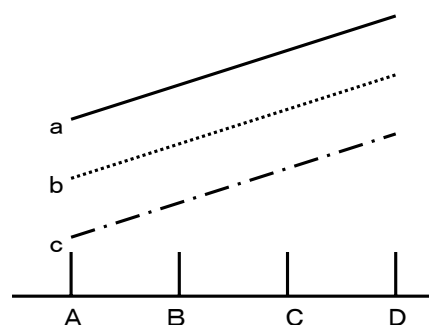
すなわち、処理の効果がなかったとしても、同じ母集団から何回も標本をとり、もっとも差がある2つの標本を t 検定すれば、平均に有意差があるという結果が得られるかもしれない。

2. 2つ以上の要因を同時に比較したい

例：ヤギの成長がよくなる葉A, B, C, Dはえさと混ぜると効果が高いかもしれない。そう考
えて、麦わら, 稲わら, 濃厚飼料の3種類と組み合わせで試験をすることを考えた。処理は2
つ, 葉と飼料であり, 葉は5水準, 飼料は3水準ある。このとき比較すべき試験は, 葉A+
麦わら, 葉A+稲わら, 葉A+濃厚飼料, 葉B+麦わら, 葉B+稲わら, 葉B+濃厚飼料, 葉
C+麦わら, 葉C+稲わら, 葉C+濃厚飼料, 葉D+麦わら, 葉D+稲わら, 葉D+濃厚飼料,
対照区+麦わら, 対照区+稲わら, 対照区+濃厚飼料となる。

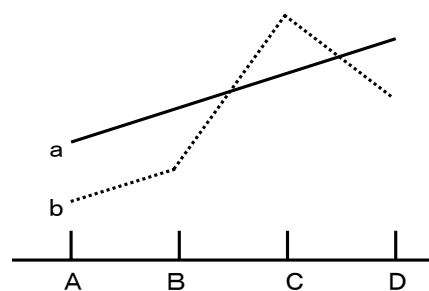
葉Aでは稲わらが一番よいえさだったが, 葉Bでは麦わらが一番よいえさだったという結果が
出るかもしれない。t検定では2つの要因が絡み合った結果を解析できない。2つ以上の要因が
絡んだ結果(交互作用)はt検定では解析できない。

交互作用がないときは右の図のように各処理の反応直線は
平行関係にある

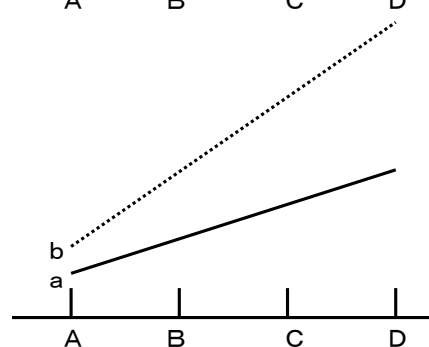


t検定ではわからないこと 交互作用

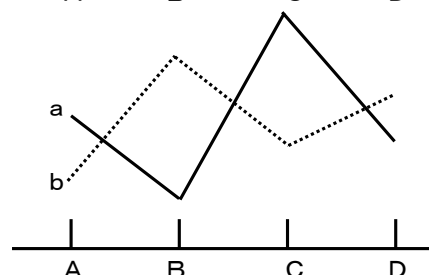
① 組み合わせの妙



② 相乗効果



③ 打ち消しあう場合(干渉効果)



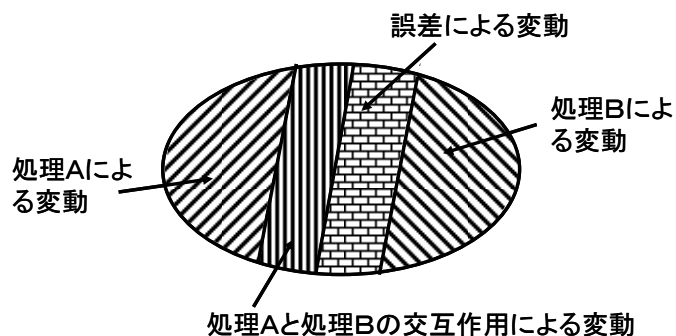
交互作用のあるときは1つの要因(処理)だけを見て結論づけるわけには行かない。要因(処
理)の組み合わせを考える必要が出てくる。

3. ばらつき（分散）を偶然誤差と意味のあるものに分解する

処理の間の違い，交互作用は本当に意味のあるものなのか？（有意であるか？）

実験データのばらつきは処理によって生じたもの（意味のある部分）と誤差によるばらつき（意味のない部分）に分けることができる。

分散の加法性



データの総変動＝処理による変動＋誤差変動

＝個々の処理による変動（主効果）＋交互作用＋誤差変動

2つの標本の分散の検定 F検定

処理による変動が誤差による変動に比べて，十分に大きいのか（正確には処理による変動と誤差による変動は等しいという帰無仮説が棄却できるのか）を検討する。

B. 分散分析の理論（一元配置の場合）

例：ハムスターをひまわり，大豆，人工餌の3種類のどれで育てるのが一番よいかを実験した。

① 実験結果に全く誤差がなく，餌の効果だけが現れたらどうなるか？

全く差がない場合，
実験結果は下のようになる

餌の効果に差があるなら，
(効果の合計=0)

餌の効果に差があるなら，
(効果の合計=0)

	ひまわり	大豆	人工餌		ひまわり	大豆	人工餌		ひまわり	大豆	人工餌
1	15	15	15	1	0	-3	3	1			
2	15	15	15	2	0	-3	3	2			
3	15	15	15	3	0	-3	3	3			
4	15	15	15	4	0	-3	3	4			
5	15	15	15	5	0	-3	3	5			

② 実験結果に誤差がランダムに適当に混ざっているならばどうなるか？

餌の効果が誤差なく発揮されると
実験結果は下のようになる

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

誤差があるなら、
(誤差の合計=0)

	ひまわり	大豆	人工餌
1	2	3	1
2	0	0	-4
3	3	-2	-1
4	-3	0	-1
5	1	-2	3

左の2つを足すと
実験結果は下のようになる

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

誤差によって、データの処理による違いがわかりにくくなった。
餌の効果が±3に対して、誤差も±4もあるからである。

③ 得られた実験結果から誤差を分離してみる

実際に得られた実験結果は
下の通りである

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

列の合計
列の平均
列の効果

左の実験結果から列の平均を
それぞれ引くと誤差を分離できる

	ひまわり	大豆	人工餌
1			
2			
3			
4			
5			

誤差の合計=0

④ 列の効果を判定する：誤差に比べて十分に大きいのか？

ばらつきのうち、誤差と効果によるものを分けて、比較してみよう（右の表）。

誤差と効果を比較する

	繰り返し	ひまわり	大豆	人工餌
効果	1			
	2			
	3			
	4			
	5			
誤差	1			
	2			
	3			
	4			
	5			

⑤ 分散分析を行う：効果による変動が誤差による変動に比べて十分に大きいのか？をF検定で検定する。

帰無仮説：効果による変動と誤差による変動には差がない。

対立仮説：効果による変動は誤差による変動よりも大きい。

誤差変動よりも処理の変動の方が大きいとかがえてよいから片側検定となる。

上の帰無仮説のいうことは下の図のように読み替えることもできる

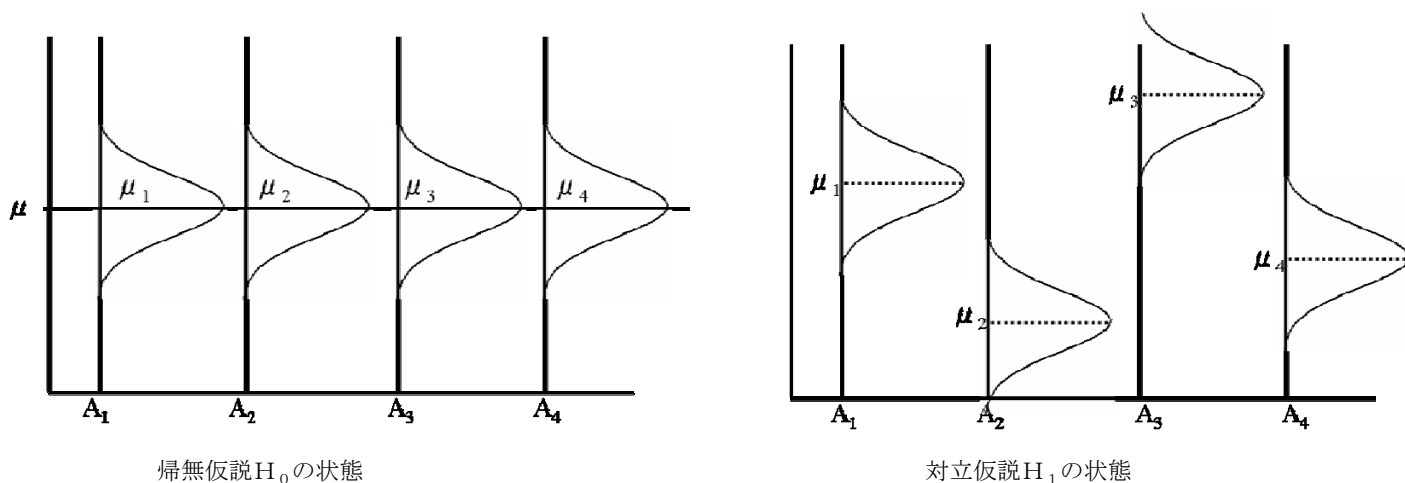


図 分散分析における帰無仮説と対立仮説

帰無仮説： $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ どの水準でも母平均は同じである

対立仮説：水準（処理）間の母平均のどれか一つは異なる

分散分析では、次の分散比Fを計算し、この分散比が得られる確率P値を計算する（実際はエクセルなどのソフトがデータを入力しただけでP値を計算する）

$$F = \frac{\text{効果のばらつきの大きさ}}{\text{誤差のばらつきの大きさ}} = \frac{\text{効果の分散}}{\text{誤差の分散}} = \frac{V_1}{V_2}$$

今回のデータの場合、F値は $F = \frac{V_1}{V_2} = \frac{43.4}{5.43} = 7.99$ となる（計算方法は省略、ホームページに

参考のために掲載）。

このようなF値が得られる確率P値を計算すると、0.006229であることから（片側検定）、有意水準1%で帰無仮説は棄却される。すなわち処理と誤差のばらつきには有意水準1%で有意な差がある。

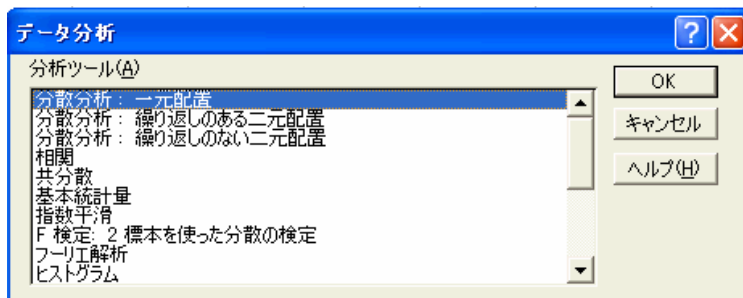
すなわちハムスターの成長は餌によって変化すると結論できる。

C. 分散分析の実際（一元配置の場合）

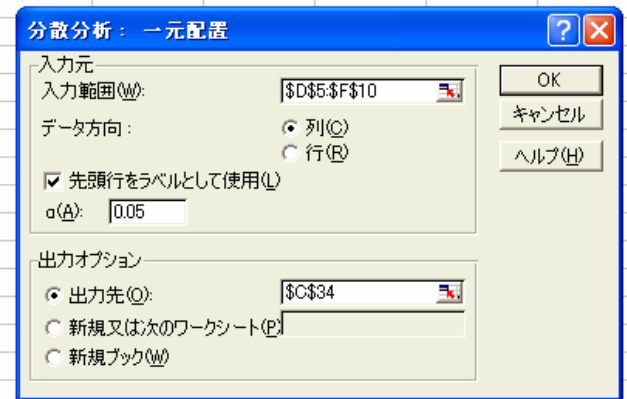
1. エクセルでの分散分析

例: ハムスターをひまわり, 大豆, 人工餌の3種類のどれで育てるのが一番よいかを実験した.

	ひまわり	大豆	人工餌
1	17	15	19
2	15	12	14
3	18	10	17
4	12	12	17
5	16	10	21



	ひまわり	大豆	人工餌
1	17	15	19
2	15	12	14
3	18	10	17
4	12	12	17
5	16	10	21



分散分析：一元配置				
概要				
グループ	標本数	合計	平均	分散
ひまわり	5	78	15.6	5.3
大豆	5	59	11.8	4.2
人工餌	5	88	17.6	6.8

分散分析表							
変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値	
グループ間	86.8	2	43.4	7.987730061	0.006229	3.88529	
グループ内	65.2	12	5.433333				
合計	152	14					

エクセルで分散分析するときにはF値を調べる必要はない。P値をみれば、帰無仮説が成り立つ場合、今回えられたようなデータが出現する確率（P値）がわかる。P値が0.05以下であれば有意水準5%で帰無仮説は棄却され、処理間の母平均に差があること、すなわち処理によってハムスターの成長が変わったことが示される。

2. 分散分析の結果の表現方法

分散分析の結果はふつう下のような表に書いて示す。()内はエクセルでの表現.

変動因	自由度 ϕ (自由度)	平方和 S (変動)	平均平方 V (分散)	分散比 F (観測された分散比)
処理間	ϕ_A	S_A	$V_A = S_A / \phi_A$	F_0
誤差	ϕ_E	S_E	$V_E = S_E / \phi_E$	
全体	ϕ_T	S_T		

さらに有意水準 5%, 1% で有意であればそれぞれ, *, ** を F_0 の右肩につけるのが慣習となっている. 有意差が検出されなかったときは ns をつけることもある.

自由度と平方和には加法性がある.

$$\phi_T = \phi_A + \phi_E, \quad S_T = S_A + S_E$$

むかしは P 値の計算が難しかったので, ほとんどしなかったが, 最近ではコンピューターの発達で容易となった. そのため P 値を表に載せることも最近の論文ではときおり見かけるようになった.

3. 分散分析の結果の意味

分散分析は処理 (水準) 間の母平均に差がないという帰無仮説を検定している

帰無仮説: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ どの水準でも母平均は同じである

対立仮説: 水準 (処理) 間の母平均のどれか一つは異なる

したがって, 分散分析の結果, 有意差があることが分かった場合, その意味するところは, 処理 (水準) の中で一つは母平均の異なるものがある, すなわち処理によって変わるということである. 一般的には一番値の小さいものと一番値の大きいものとの間には有意差があるということになる. それ以外の処理 (水準) 間に差があるかは分散分析ではわからない. これを調べるのは多重比較法である. 多重比較法については後の授業で簡単に説明する.

練習1:

例: ヤギの成長がよくなるという薬A, B, C, Dのうち, どれが効果があるかあるいはないか, どれが一番効果があるかを比較したい. したがって, 対照区(コントロール, 薬を与えない区), A, B, C, Dの5つを比較することになる. 処理: 薬, 水準: 5つである.

次のような結果を得た.

処理	対照区	A	B	C	D
	100	105	96	100	115
	102	108	97	97	112
	104	110	100	95	100
	105	106	102	104	105
	103	104	99	103	106
平均	102.8	106.6	98.8	99.8	107.6
標準偏差	1.92	2.41	2.39	3.83	5.94

帰無仮説:

対立仮説:

P値=

結論 有意水準 () %で帰無仮説は(棄却される・棄却されない).
したがって, 薬によってヤギの成長量は(変わる・変わらない).

練習2: 右の例で水稻の1穂穎花数には品種間
差があるかを分散分析せよ.

水稻の1穂穎花数の品種間差異を5品種について調査した。

	コシヒカリ	日本晴	NPT160	IR72	タカナリ
	56	80	188	131	177
	52	84	169	129	207
	64	64	131	106	179
	60	71	233	95	173
	17	81	186	152	109
	98	93	183	152	151
	122	107	167	145	143
	101	104	135	144	162
	128	77	148	153	123
	85	60	126	83	188
	125	96	177	160	96
	60	111	158	115	152
	108	78	127	113	162
	85	80	162	71	111
	83	80	117	76	139
	97	94	144	101	154
	84	85	165	76	132
	108	92	98	68	214
平均	85.16667	85.38889	156.3333	115	154
標準偏差	29.40038	13.9332	31.93007	31.8932	32.76476

帰無仮説:

対立仮説:

検定結果：P値＝

4. 分散分析をする上での注意

① なるべく反復数はそろえる

今回学んだ一元配置の分散分析では反復数が個々の処理区で異なってもそれほど問題はない。しかし、来週以降に学ぶより複雑な分散分析では、反復数が異なると解析が面倒になるだけでなく、精度も大きく落ちてしまう。実験開始のときは反復数をそろえて実験するのが普通であるが、事故や不注意なので反復数がそろわなくなることもあるかもしれない。しかし、できるだけ反復のそろうように実験することが基本である。なお反復がそろわないからといって、一部のデータを削除するのは間違ったやり方である。

② 複雑な実験はなるべく避ける

前項とも関連するが、分散分析ではデータが複雑になるほど、解析が面倒かつ間違いやすくなる。特にコンピューターで計算させるときは、データの输入の仕方を間違いやすくなり、自分の目的とする分散分析をするにはデータの構造が複雑（あるいはでたらめ）で、解析不能ということもあり得る。そのうえ、反復がそろわなかったときの影響も大きくなる。必要のない複雑な実験は避けるのはもちろんのこと、必要だとしてもできるだけ簡単な実験計画にならないかをよく検討してから実験するべきである。実験計画を立てた時点で、どういう分散分析をするのかを決めておくのが正しい統計解析方法である。

③ 正規分布するデータが前提条件である

分散分析では比較する母集団それぞれが正規分布すること、母分散が等しいことが理論的には前提条件になる。しかし、分散分析は多少その前提条件からはずれていても、結果が大きく左右されない頑健性をもっている。

④ すべての水準に対して母分散が等しいことも前提条件である

水準ごとの反復数がみな同じである場合、この前提が多少崩れても影響はあまりない。

⑤ フィッシャーの3原則を満たした実験計画のもとで、分散分析を行う

誤差に系統誤差が入ると解析結果の妥当性が失われる危険性がある。系統誤差を除去する、あるいは分散分析の解析の妨害とならない偶然誤差に転化するのがフィッシャーの3原則に述べられた反復、無作為化、局所管理である。詳細は第11回の授業で学ぶ予定である。

D. 宿題

1. 第8回の宿題4. で調べたデータについて分散分析せよ.
2. 次回の授業では二元配置の分散分析について学ぶ. 2つの処理を組み合わせたときのデータの解析方法である.
 - ① 産地と品種の違いがリンゴの糖度に及ぼす影響を知りたい.
 - ② 施肥量と品種の違いがイネの1穂穎花数に及ぼす影響を知りたい.
 - ③ 作期と品種の違いがトマトの酸度に及ぼす影響を知りたい.

二元配置で分散分析できそうなデータを自分で,あるいは数人のグループで調査,あるいは競技などをして集めよ. なお,データには反復が2つ以上あり,それぞれの処理で反復の数は同じにすること. データの配置は下の図のようになる.

産地と品種の違いがリンゴの糖度に及ぼす影響を各処理3つずつのリンゴで調査した.
産地: 青森, 長野, 山形, 品種: 紅玉, ふじ, むつ

	青森	長野	山形
紅玉	() () ()	() () ()	() () ()
ふじ	() () ()	() () ()	() () ()
むつ	() () ()	() () ()	() () ()

他にも次のような例が考えられる

コンビニ弁当の売れ行き 曜日, 天気 の2つの要因

イネの1穂穎花数 品種, 施肥 の2つの要因

小鳥のさえずる回数 気温, 太陽の明るさ の2つの要因

遠投距離 ボールの重さ, 個人差 の2つの要因

自転車競争 自転車の種類, 個人差 の2つの要因

金魚の餌摂取量 水温, 品種 の2つの要因

食塩水の沸騰時間 食塩水の濃度, 室温 の2つの要因

自動車の燃費 天気, 道路 (一般, 高速, 山道) の2つの要因