第７回　ｔ分布とｔ検定

Ａ．ｔ分布（小標本に関する平均の推定と検定）

前々回と前回の授業では，標本が十分に大きいあるいは母分散が既知であることを条件に正規分布を用いて推定・検定した．しかし，母集団が正規分布し，標本が小さい場合には，標本分散から母分散を推定するときの不確実さを加味したｔ分布を用いて推定・検定しなければならない．ｔ分布は標本分散の自由度ｆ(ふつう f=n-1)によって分布が決まる．標本数ｎが増えるとｔ分布は正規分布に近づき，n=∞のときに正規分布と一致する．

ｔ分布：$x_1, x_2, \cdots, x_n$が互いに独立に$N(\mu, \sigma^2)$に従うとき，

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{V/n}} = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \text{は自由度} n-1 \text{の} t \text{分布に従う}$$

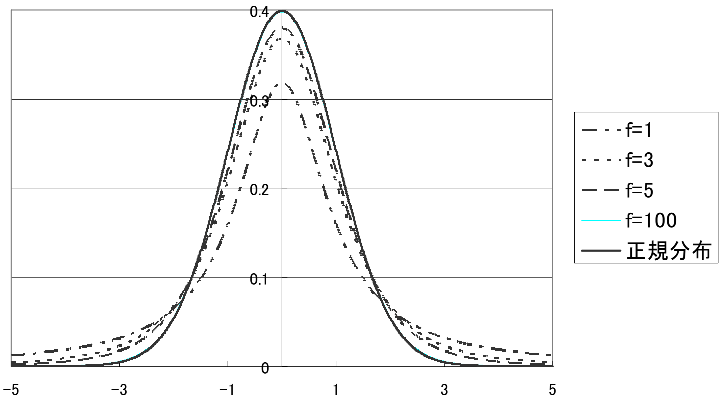


図　ｔ分布と正規分布（n=無限大のときｔ分布は正規分布と一致する

ｔ分布は，標本が少ないときに，標本標準偏差から母標準偏差を推定する誤差を含むので，正規分布よりばらつきの大きな分布となる．

Ｂ．ｔ分布による区間推定

母平均μの推定方法（母分散σ²は未知である）

基本的な考え方は正規分布を用いた区間推定と同じである．

点推定：　すなわち標本平均をそのまま母平均の点推定に使う．

区間推定：母集団が正規分布するとき，信頼率 p %のときの母平均μの信頼区間は，エクセルでは TINV 関数を用いて，以下のように計算する．

$$\bar{x} - TINV(1-p/100, n-1)\times SE < \mu < \bar{x} + TINV(1-p/100, n-1)\times SE$$

ここで，

標準誤差$SE = s/\sqrt{n} = \sqrt{V/n}$

n は標本数

p は信頼率（%）

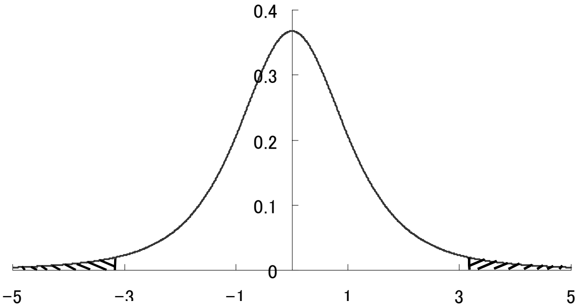


図 ｔ分布での 95%信頼区間

例：A公園の桜から 6 本を無作為に選びの木に付く花の数を数えた．123,156,168,190,211,234 の 6 つのデータを得た．A公園の桜の花の数（平均）を 95%信頼区間および 99%信頼区間をつけて推定せよ．

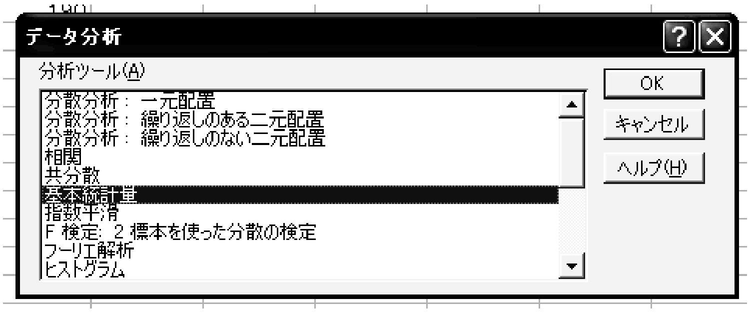
標本平均は（　　　　　　）である．
標準偏差は（　　　　　　）である．
標準誤差は（　　　　　　）である．

95%信頼区間をつけた推定値は
（　　　　　）≦ μ ≦（　　　　　）
あるいは
μ =（　　　　　　）±（　　　　　　）
と表記してもよい．

99%信頼区間をつけた推定値は
（　　　　　）≦ μ ≦（　　　　　）
あるいは
μ =（　　　　　　）±（　　　　　　）と表記してもよい．

	A	B	C	D
46			123	
47			156	
48			168	
49			190	
50			211	
51			234	
52				
53		平均	180.3333	=AVERAGE(C46:C51)
54		標準偏差	39.8631	=STDEV(C46:C51)
55		標準誤差	16.27404	=C54/sqrt(6)
56				
57				
58	95%	信頼区間	2.570582	=TINV(1-95/100,6-1)
59		下限	138.4996	=C53-C58*C55
60		上限	222.1671	=C53+C58*C55
61				
62	95%	信頼区間	4.032143	=TINV(1-99/100,6-1)
63		下限	114.7141	=C53-C62*C55
64		上限	245.9526	=C53+C62*C55

★　エクセルの分析ツール→基本統計量による計算の仕方



	K	L	M	N	O	P	Q
1							
2							
3	データ		列1				
4	123						
5	156		平均	180.3333		138.4996	=N5-N20
6	168		標準誤差	16.27404		222.167	=N5+N20
7	190		中央値（メジアン）	179			
8	211		最頻値（モード）	#N/A			
9	234		標準偏差	39.8631			
10			分散	1589.067			
11			尖度	-0.60399			
12			歪度	-0.09678			
13			範囲	111			
14			最小	123			
15			最大	234			
16			合計	1082			
17			標本数	6			
18			最大値(1)	234			
19			最小値(1)	123			
20			信頼区間(95.0%)	41.83369			
21							

★　母標準偏差が既知であるとしたときにはどのくらい推定値の信頼区間が小さくなるか

練習：M大学の学生から 10 人を無作為に選び，100m 走をし，13.6±3.3 秒（平均±標準偏差）を得た．95%信頼区間をつけて，母平均を区間推定せよ．

C．ｔ検定

1．ある決まった平均に対する検定

例：Ｔ食堂のラーメンの大盛りはライバル店Ｋレストランより 50g 多いと主張している．Ｋ君はＴ食堂で 10 回ラーメンの大盛りを注文し，こっそり重さを調べた結果，Ｋより 47±4g 多いという結果を得た．50g 多いというＴ食堂の主張を検定せよ．

帰無仮説：　H_0：　$\mu = 50g$

対立仮説：　H_1：　$\mu \neq 50g$

有意水準を設定する．この場合，有意水準を 5%としてみよう．

p−値を計算する．

帰無仮説が成り立つとして，今回の結果が得られる確率はエクセルで次のように計算できる．

p−値$= TDIST(ABS(\mu - \bar{x})/SE,\ n-1, 2) = 0.041792$

練習（前述の練習と同じデータ）：M大学の学生から 10 人を無作為に選び，100m 走をし，13.6±3.3 秒を得た．大学当局の主張は 12 秒だが，有意水準を 5%として t 検定せよ．

帰無仮説：

対立仮説：

p−値＝

検定結果：

２．　２つの母集団からの小標本の検定

①　対応のないデータのときの t 検定

２つの独立した母集団から得た２つの小標本の平均に関する検定は t 分布に基づいて行う．

例：T 牧場とW牧場のニワトリの卵を 10 個ずつ調査し，それぞれ右下の表のようなデータを得たとなった．両牧場の卵の重さの母平均は違うのかを検定せよ．

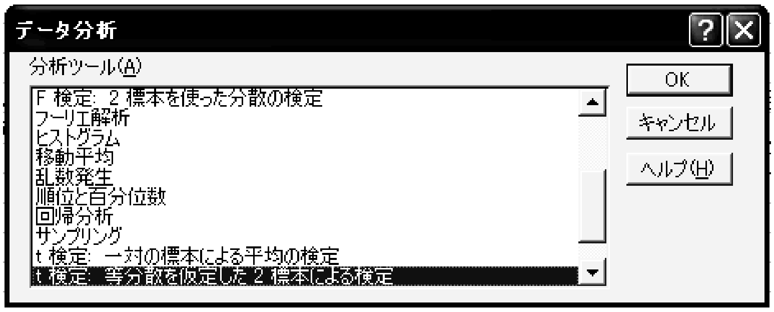
T牧場	W牧場
66.3	64.4
67.5	65.3
68.8	65.8
66.5	66.2
65	64.1
69.1	69.6
70.3	64.4
64	64.4
69.6	68.8
70.5	64.1

帰無仮説　H_0：　$\mu_T = \mu_W$

対立仮説　H_1：　$\mu_T \neq \mu_W$

ここでは有意水準を 5%としてみよう．

帰無仮説が成り立つとしたときに今回のデータが得られる確率である p-値はエクセルの分析ツールの t 検定:等分散を仮定した２標本による検定で計算できる．



t-検定：等分散を仮定した2標本による検定

	T牧場	W牧場
平均	67.76	65.71
分散	5.084889	3.936556
観測数	10	10
プールされた分散	4.510722	
仮説平均との差異	0	
自由度	18	
t	2.15832	
P(T<=t) 片側	0.022328	
t 境界値 片側	1.734063	
P(T<=t) 両側	0.044656	
t 境界値 両側	2.100924	

両側検定での p-値は 0.044655＜5%なので，帰無仮説は有意水準 5%で棄却された．しかし，有意水準 1%にすると棄却できない．以上のことから，有意水準 5%でT牧場とW牧場のニワトリの卵の重さ（の母平均）は異なると結論できる．

練習：Ａ地区とＢ地区それぞれ地区ぐるみで健康のために減塩に取り組んだ．無作為に選んだ標本から摂取食塩量を調査した．その結果は右下の表のようになった．食塩摂取量に差はあるのかを有意水準 5%として，ｔ検定せよ．

A地区	B地区
6.0	5.6
6.2	6.4
5.8	6.8
5.6	6.6
6.0	6.0
5.9	5.8
6.4	6.2
6.8	6.6
5.4	5.9
5.8	6.3
6.2	
6.4	

帰無仮説：

対立仮説：

p-値＝

検定結果：

② ｔ分布による区間推定およびｔ検定の注意点

ａ．ｔ分布は正規分布する母集団から得た標本の平均に関する分布である．したがって，ｔ分布による区間推定およびｔ検定をするときには，母集団が正規分布する，あるいは正規分布に近似できることが前提条件である．

正規分布に近似できない母集団であっても，変数の対数，逆数などをとることによって，正規分布に近似できる場合，変数変換してからｔ分布による区間推定およびｔ検定をすることができる．

ｂ．２つの独立した母集団の母平均に差があるかどうかを検定するｔ検定の場合，２つの母集団が正規分布することおよび２つの母集団の母分散が等しいことの２つが前提となっている．しかし，実際には標本数がほぼ同じ場合には母分散が異なっていてもそれほど検定に問題がないことがわかっている．したがって，母分散が異なっており，標本数も大きく異なる（おおむね２倍以上）場合にはこの方法を用いると問題がある．この場合には Welch の検定を使う．

なお母分散に差があるかどうかを検定する方法はＦ検定といい，次回，学ぶ予定である．Welch の検定はホームページで詳しく紹介するが，このプリントの最後に参考として載せておく．

③　対応のあるデータのときの t 検定

例：A，B の２つのハカリで同じ品物を量る．同様に 10 個の品物についてそれぞれ量って，右の表のような結果を得た．２つのハカリの指示には差があるか．

品物 No.	はかりA での値	はかりB での値	重さの差 d
1	427	419	8
2	401	391	10
3	408	410	-2
4	417	406	11
5	416	406	10
6	396	400	-4
7	437	432	5
8	386	391	-5
9	406	402	4
10	402	395	7
平均	409.6	405.2	4.4

前項の対応のないデータでの検定を行うと 5%で有意でないという結果が出る．しかし，A，B のハカリの差を品物ごとに取ると何か傾向がありそうだとわかる．このように２つの標本のデータが対応する場合，２つの標本は独立していないといい，対応するデータの対の差 d を検定しなければならない．エクセルの分析ツールでは t 検定：一対の標本による平均の検定を使う．

対応のあるデータの差 d について検定する．

帰無仮説：　H_0：$\mu_d = 0$　A と B の２つのはかりの指示は同じである．

対立仮説：　H_1：$\mu_d \neq 0$　A と B の２つのはかりの指示は異なる．

t-検定：一対の標本による平均の検定ツール

	はかりA での値	はかりB での値
平均	409.6	405.2
分散	226.4889	164.1778
観測数	10	10
ピアソン相関	0.918931	
仮説平均との差異	0	
自由度	9	
t	2.310462	
P(T<=t) 片側	0.023101	
t 境界値 片側	1.833114	
P(T<=t) 両側	0.046202	
t 境界値 両側	2.262159	

p-値が 0.046202＜5%であるから，有意水準 5%で帰無仮説は棄却され，A，B２つのハカリの指示に 5%の有意水準で相違があると結論できる．

練習：U牧場で飼育している牛は晴れの日と雨の日では餌の摂取量（kg）が違うらしい．10 頭の牛についてそれぞれ晴れの日と雨の日の餌の摂取量を調べたところ，下の表のようになった．牛の餌の摂取量が天気によって異なるのかを有意水準５％で t 検定せよ．

帰無仮説：

対立仮説：

p−値＝

検定結果：

牛 No.	晴れの日の摂取量	雨の日の摂取量	摂取量の差
1	10.6	10.3	0.3
2	11.3	11.2	0.1
3	9.8	9.9	−0.1
4	8.9	9	−0.1
5	12.4	12.1	0.3
6	8.3	8.1	0.2
7	10.5	10.5	0
8	11.4	11.1	0.3
9	9.4	9.2	0.2
10	10.8	10.5	0.3
平均	10.34	10.19	0.15

D．宿題

１．第６回の宿題４．で調査したデータを用いて，２種類の卵（あるいは別のもの）の重さの母平均が同じであるかを有意水準 5%で t 検定せよ．また，それぞれの卵について，95%信頼区間および 99%信頼区間をつけて母平均を推定せよ．

２．第６回の宿題４．で調査したデータについて，今回返した前回の宿題の講評の最後に書いてある母平均についての検定を行え．

３．Ａ君とＢ君はどちらが自転車で速く移動できるかを競った．１０台の自転車をそれぞれ１回ずつ使って，ある一定距離の移動時間を測定したところ，以下のようになった．両者の自転車移動時間に５％の有意水準で差があるかを検定せよ．

自転車番号	移動時間(分)	
	A君	B君
1	124	135
2	109	105
3	145	155
4	120	120
5	139	140
6	115	121
7	98	108
8	127	123
9	104	109
10	112	118

参考：Welch の検定

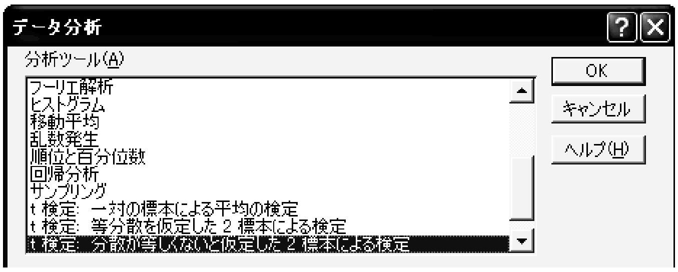
２つの標本の標本数が大きく異なり（おおむね２倍以上），かつ分散も異なる場合には２つの独立した母集団の母平均に差があるかを検定するときに t 検定を使うと間違った結論を得る可能性が大きくなる．そこでこの場合，Welch の検定を使う

今回のプリント P5 で使った練習問題を使って，Welch の検定を行う．

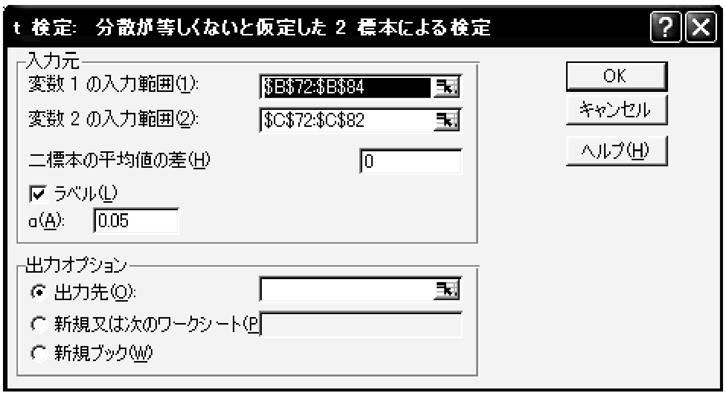
練習：Ａ地区とＢ地区それぞれ地区ぐるみで健康のために減塩に取り組んだ．無作為に選んだ標本から摂取食塩量を調査した．その結果は右下の表のようになった．食塩摂取量に差はあるのかを検定せよ．

A地区	B地区
6.0	5.6
6.2	6.4
5.8	6.8
5.6	6.6
6.0	6.0
5.9	5.8
6.4	6.2
6.8	6.6
5.4	5.9
5.8	6.3
6.2	
6.4	

1．エクセルの分析ツールから分散が等しくないと仮定した２標本による検定を選ぶ



2．データの範囲を入力する．



3．検定結果は右の通りとなった．したがって，P 値は 0.14 なので５％の有意水準では帰無仮説は棄却できない．したがって，両地区の食塩摂取量に差があるとはいえないと結論される．

t-検定：分散が等しくないと仮定した2標本による検定

	A地区	B地区
平均	6.041667	6.22
分散	0.148106	0.152889
観測数	12	10
仮説平均と	0	
自由度	19	
t	-1.07284	
P(T<=t) 片	0.148391	
t 境界値 片	1.729131	
P(T<=t) 両	0.296782	
t 境界値 両	2.093025	