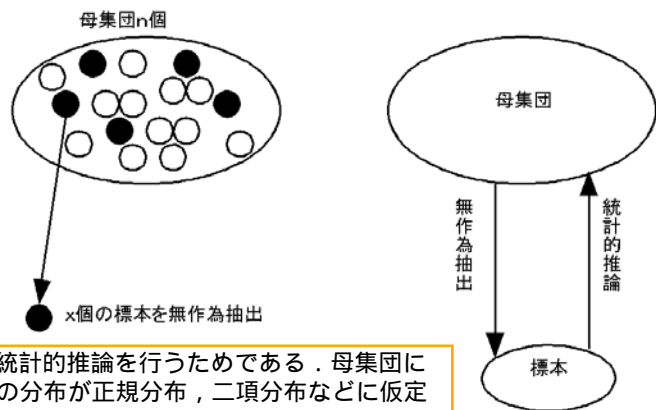


第5回 統計的推定

PP1 タイトル

A. 統計的推定と検定

母集団から無作為抽出した標本から母集団についてなんらかの推論を行う。この場合、統計から行う推論には統計的（**推定**）と統計的（**検定**）の2つがある。



PP2 統計的推論 統計の目的は、普通集めてきたデータから統計的推論を行うためである。母集団について標本から統計的に推論することができる。特に母集団の分布が正規分布、二項分布などに仮定できると推論はより強力になる。統計から行う推論には統計的推定と統計的検定の2つがある

推定 統計的に標本の統計量から母集団の母数（母平均、母標準偏差など）を推論することを統計的推定という。 **PP3 統計的推定と検定**

例：視聴率調査を 200 人に対して行い、番組Aの視聴率を推定した。

統計的推定では数値を出す

検定 統計的に標本の統計量から母数に関する予想の真偽を検証することを統計的検定という。

例：視聴率調査を 200 人に対して行い、番組Aの視聴率が 20%以上あるのかを検定した。

例：A社とB社の車の排気ガスに含まれる窒素酸化物はA社の方が多いのかを検定した。

統計的検定ではイエスか、ノーかを定める

PP4 統計的推定か、統計的検定かを考える

★ 次の文章は統計的推定か、統計的検定かを考えよ。

質問する（6人）

① A牧場の牛から 20 頭を選んで、乳脂肪率を測定し、A牧場の牛全体の乳脂肪率を知りたい。

統計的推定

② 番組Bの視聴率を知りたい。

統計的推定

③ 窒素施肥量 10kg/m²を与えると、コシヒカリの収量がいくらになるかを知りたい。

統計的推定

④ A牧場の牛は去年から飼料をF社からG社に変えた。乳脂肪率が変化したかを知りたい。

統計的検定

⑤ 番組Bは番組Cより視聴率が高いのかを知りたい。

統計的検定

⑥ 1日当たりの喫煙本数が増えるほど、肺ガンの危険性が増えるのかを知りたい。

統計的検定

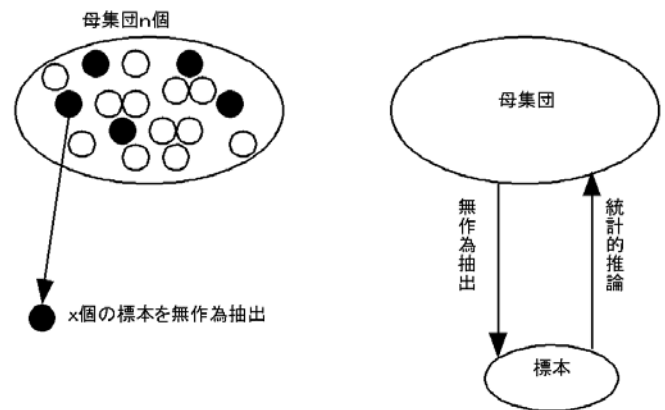
PP5 標本から母集団を推定する

質問する（2人）

わたしたちはふつう（**母集団・標本**）の平均にもっとも関心をいだく。では（**標本**）の平均から母集団の平均に関する統計的推定、検定をすることができるのだろうか？

B. 標本平均の分布

1. 母集団から無作為に取り出した標本の性質



PP6 標本と母集団の関係

わたしたちは統計的な調査をするときに（**標本**）を（**母集団**）から（平均に近いと思われるものを選んで・でたために**無作為に**）抽出する。

（**無作為**）に抽出された（**標本**）からわたしたちが興味を持っている（**母集団**）の性質を（**統計的**）に推論する。

わたしたちはふつう（**母集団**）の平均にもっとも興味を持つことが多い。

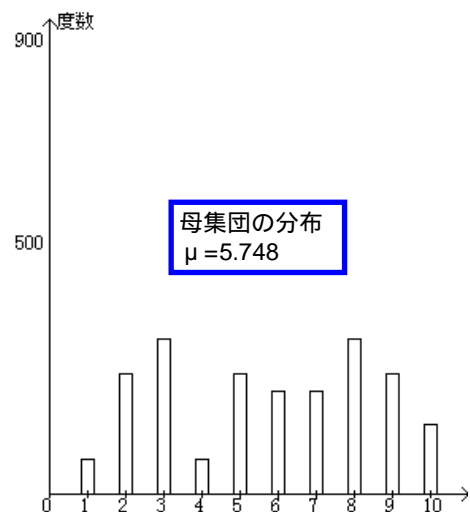
標本を5つ無作為に取るという試行を2000回繰り返すと2000個のデータからなる標本平均はどんな分布となるだろうか？下のグラフに標本平均の分布を想像して書いてみよう。

PP7 標本から母集団を推定する

質問：では母集団の平均と標本平均の関係は？

PP8 無作為抽出による標本平均の分布

右のような分布をする母集団から標本を5つとり、平均を得る。これを2000回繰り返すと、標本平均の分布が得られる。標本の分布はどうなるか？（質問）
標本平均はどんな分布となるか？（質問）



このような標本平均の分布の特徴を考えてみよう。

① 母集団の分布と標本の分布の形はどのように対応する

だろうか？ **PP9~10 パソコンで遊ぶ数学実験で標本平均の分布をみる**

PP11 標本5つ無作為にとったときの標本平均の分布

PP12 母集団の分布と標本の分布の形はどのように対応するか？標本の平均は母集団の平均に対してどのように位置づけられるか？

② 標本の平均は母集団の平均に対してどのように位置づけられるだろうか？

PP13 母集団の分布にかかわらず、標本分布は正規分布に近い形となる

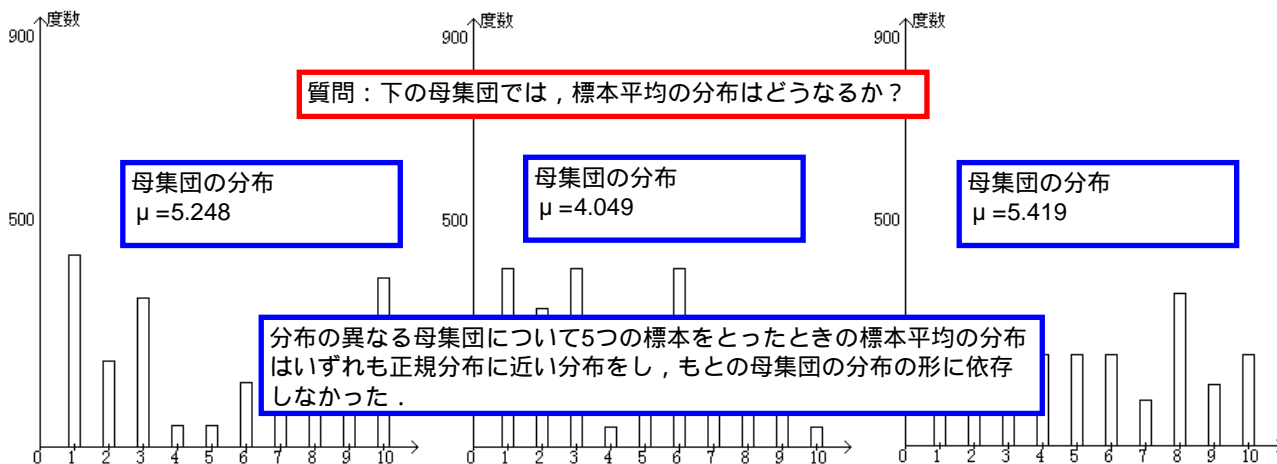
PP13 標本の平均は母集団の平均と一致する

③ 標本の平均はどのくらいばらつくだろうか？

PP14 標本平均の分布は、標本数が少ないと大きくばらつき、標本数が多いとあまりばらつかなくなる

PP13 母集団の分布の形が異なる場合には標本分布はどうか？

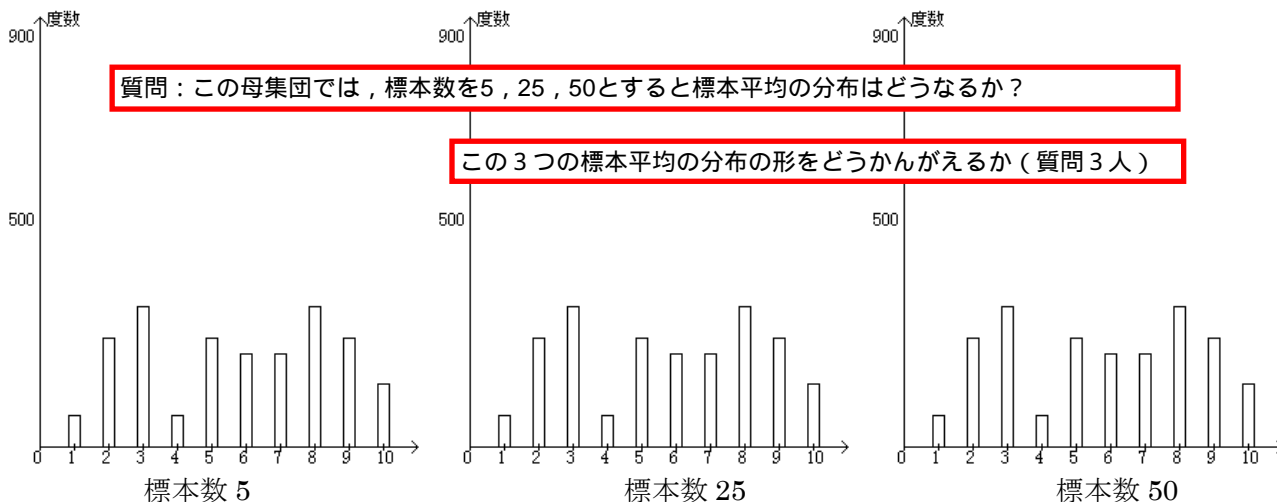
母集団の形と標本平均の分布の形にはどのような関係があるだろうか？下の3つの異なる分布をする母集団について、その標本平均がどのように分布するかを書き込んでみよう。



★ 母集団の分布の形にかかわらず、標本平均の分布は（正規分布）に近似できる。

PP14 標本数を多くすると標本平均の分布はどうか？

次に標本を取る数を増やしてやるとどうなるだろうか？すなわち標本を5つ無作為に取るという試行に代えて、標本を25, 50と増やすと標本平均はどのように分布するか？



PP15 標本数を多くするとどうか？

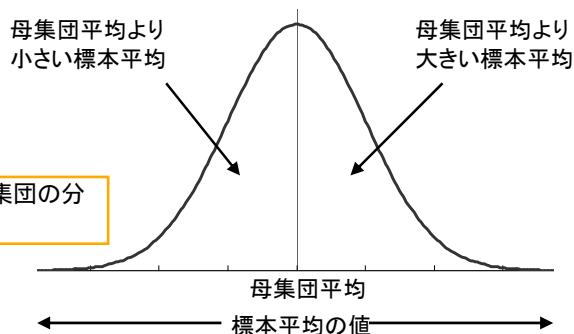
★ 標本数を増やすと、標本平均の分布の分散が（大きく **小さく**）なる。

平均は母集団の平均と一致する．標本数を増やすと標本平均の分布の分散が小さくなる

以上のことから、標本数が十分に多ければ、母集団の分布によらず、標本平均の分布について、次のことがいえる。PP16 以上のことから、標本平均の分布の性質について前述の から の質問に答える

質問3人

- 母集団の分布にかかわらず、標本分布は（正規分布）に近い形となった。
- 標本の平均は母集団の平均とほぼ（等しい）。
- 標本平均の分布は、標本数が（多い・少ない）と大きくばらつき、標本数が（多い・少ない）とあまりばらつかなくなった。



PP17 標本平均の分布は中心極限定理から標本数が十分に多ければ、母集団の分布によらず、標本平均の分布は近似的に正規分布する

2. 標本平均の分布と中心極限定理 **PP18 標本平均の分布の性質**

統計的推測のために母集団から抽出した標本数 n の標本から求めた標本平均 \bar{x} の分布は、次の性質を持つ。

- ① 標本平均 \bar{x} の期待値は母平均 μ に等しい。
- ② 標本平均 \bar{x} の分散は母分散 σ^2 の $\frac{1}{n}$ に等しい。したがって、標本平均 \bar{x} の標準偏差(standard

diviation, SD)は $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ となる。標本平均の標準偏差を (**標準誤差**) (standard error, SE) と呼ぶ。 **PP19 標準誤差**

- ③ n が十分に大きいときは大きさ n の標本の標本平均は $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ の正規分布に近似できる (中心極限定理という)。

- ④ 標準誤差は標本平均 \bar{x} がどのくらい確実であるかの目安を与える。

標本平均を使って、母集団の平均を推測することから、この標本平均が正規分布に近似できるという特性は重要である。

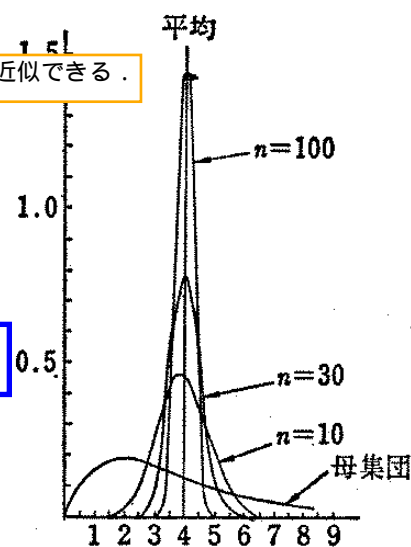
母集団の標準偏差が小さいほど、あるいはサンプル数を増やすほど標準誤差は小さくなり、標本平均は母集団の平均を推定するときの確実さを増す。

PP20 かなりゆがんだ分布でも標本平均の分布は標本数を十分に増やせば、正規分布に近似できる。

右図のようにかなりゆがんだ分布でも標本平均の分布は標本数 n を十分に増やせば、正規分布に近似できる。したがって、標本数が十分にあれば標本平均から母平均を考える場合、正規分布をつかってよい。

正規分布に近い分布であれば標本数が10もあれば十分であり、かなり偏った分布(指数分布など)でも50以上あれば正規分布と見なせることがわかっている

★ 標本平均の分布が正規分布に近似できることから、統計的推定、検定は正規分布を軸に行う。



PP21 標本の数多くすると標準誤差が小さくなり、標本平均の信頼が増す。

3. 標準誤差の計算 **PP22 標準誤差の計算**

標本数 n , 標準偏差 $S.D.$ のとき、標準誤差 $S.E.$ は

$$S.E. = \frac{S.D.}{\sqrt{n}} \quad \text{となる.}$$

例：ある鳥の100個の卵の重さを量ったところ、平均25.3g、標準偏差3.0gであった。したがっ

て、標準誤差 $S.E. = \frac{S.D.}{\sqrt{n}} = \frac{3.0}{\sqrt{100}} = 0.3g$ である。この鳥から100個の卵をサンプリングした

ときに、標本平均は $N(25.3, 0.09)$ の正規分布に従うと考えられる。

=3/SQRT(100)	0.3
--------------	-----

PP23 エクセルによる標準誤差の計算

エクセルによる標準誤差の計算

例：ある鳥の卵10個の重さを量ったところ、15.4, 15.8, 15.9, 16.1, 16.2, 16.4, 16.6, 16.8, 16.9, 17.5gであった。平均は16.4g、標準偏差は0.6g、標準誤差は0.2gである。

PP24 標準誤差の計算：例

集めてきたデータそのものから、標準誤差をエクセルで計算するには標準偏差、サンプル数をそれぞれ関数から計算する方法と分析ツールにある基本統計量から計算する方法がある。

	エクセルでの計算式	答え
平均	=AVERAGE(C12:C21)	16.36
標準偏差	=STDEV(C12:C21)	0.613188
サンプル数	=COUNT(C12:C21)	10
標準誤差	=STDEV(C12:C21)/SQRT(COUNT(C12:C21))	0.193907

16.4 ± 0.2g (平均 ± 標準誤差) と慣用的に表記される

PP25 分析ツール：基本統計量による標準誤差の計算

	列1	答え
平均		16.36
標準誤差		0.193907
中央値 (メジアン)		16.3
最頻値 (モード)		#N/A
標準偏差		0.613188
分散		0.376
尖度		0.00258
歪度		0.336574
範囲		2.1
最小		15.4
最大		17.5
合計		163.6
標本数		10

練習 PP26 標準誤差の計算練習

① 宍道湖で50匹のコイの標本を得た。平均体重3.5kg、標準偏差1.2kgだった。この標本の標準誤差を計算せよ。 **質問する**

$$\text{標準誤差} = \frac{1.2}{\sqrt{50}} = \dots$$

$$\frac{1.2}{\sqrt{50}} \text{ の計算はエクセルでは } =1.2/\text{SQRT}(50)$$

PP27 標準誤差の計算練習

② 宍道湖で10匹のコイの標本を得た。それぞれの体重は **質問する** 1.3, 1.8, 2.3, 2.9, 3.5, 3.6, 3.8, 4.0, 4.3, 5.1kgであった。この標本の標準誤差を計算せよ。

標本数 **n=10**

	列1	答え
平均	3.26	
標準誤差	0.372738	
中央値 (メジアン)	3.55	
最頻値 (モード)	#N/A	
標準偏差	1.1787	
分散	1.389333	
尖度	-0.58518	
歪度	-0.30557	
範囲	3.8	
最小	1.3	
最大	5.1	
合計	32.6	
標本数	10	

標準偏差 **1.2kg**

標準誤差 **0.4kg**

5

3.3 ± 0.4kg

1.2		
1.8		
2.3		
2.9		
3.5		
3.6		
3.8		
4		
4.3		
5.1		
平均	3.25	=AVERAGE(G4:G13)
標準偏差	1.197451	=STDEV(G4:G13)
標準誤差	0.378667	=STDEV(G4:G13)/SQRT(10)
標準誤差	0.378667	=STDEV(G4:G13)/SQRT(COUNT(G4:G13))

標本の標準偏差は標本数を増やしてもほとんど変わらない。一方、標準誤差は標本数を増やしていくと次第に減っていく。このことは池のコイをいくらたくさん取ったとしても、池のコイの体重そのもののばらつきが大きくなったり、小さくなったりすることはないことから、標本の標準偏差そのものが標本数には関係しないことが理解できるだろう。一方、コイをたくさん取れば、池のコイの体重の平均についてはより信頼の得られる値を推定できるだろう。このような信頼の程度を示すのが、標準誤差であり、標本を増やせば、標準誤差が小さくなることが理解できるだろう。

C. 統計的推定

1. 点推定 1つの値で母数を推定する

PP28 統計的推定 (点推定)

例：朝酌川で無作為に数地点選び、鯉を釣った。鯉の体重の標本平均 5.0kg なので、朝酌川の鯉の平均体重を 5.0kg と推定した。

しかし、点推定では、推定値がどのくらい信頼できるかを示すことができない。

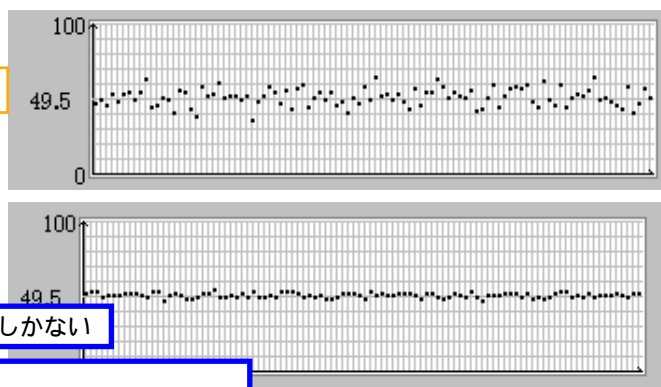
PP29 標本が少ないと標本平均はかなりばらつく

PP29 標本数を増やすと標本平均のばらつきは小さくなる。

点推定をシミュレーションである母集団から10個のサンプルを取り出して、何回か繰り返すとどうなるか？
標本平均はかなりばらつくことがわかる。
統計的手法はばらつきのあるデータに使うのだからこれではあまり役に立たない。

標本数がたった10でも10000あっても点推定では同じ表現でしかない

標本平均のばらつきを客観的に数値で表したい。
あるいは標本をそんなにたくさんとれないときに、点推定の精度を示せないか？



2. 区間推定 母数がある幅を持つ信頼区間とともに推定する。

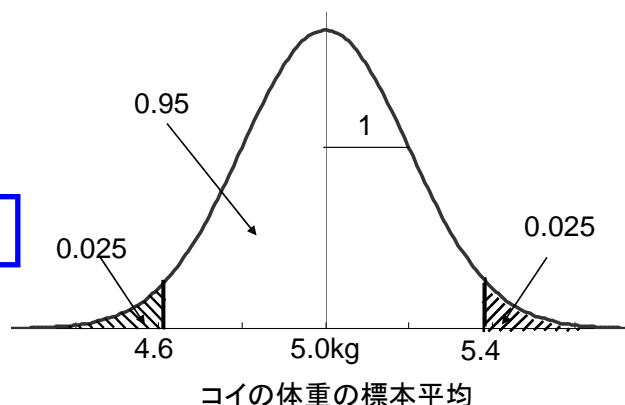
PP30 区間推定

例：朝酌川で無作為に数地点選び、鯉を釣った。サンプル数 100 匹の鯉の体重の標本平均 5.0kg, 標準偏差 2.0kg なので、朝酌川の鯉の平均体重は 95%の信頼区間をつけて、 $4.6 \leq \mu \leq 5.4kg$ と推定した。このとき、母集団（朝酌川のすべての鯉）の母平均は 95%の確率で $4.6 \leq \mu \leq 5.4kg$ の範囲に入る。

PP31 正規分布と95%信頼区間

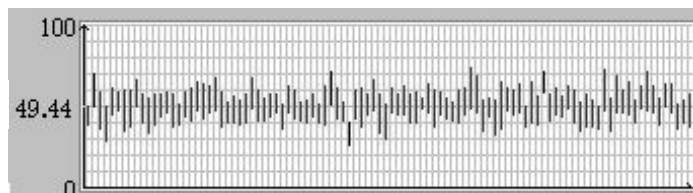
PP32 100個の95%信頼区間

95%信頼区間の場合、100回の推定のうち、5回の区間推定で信頼区間の中に母平均が含まれないということが起こる。



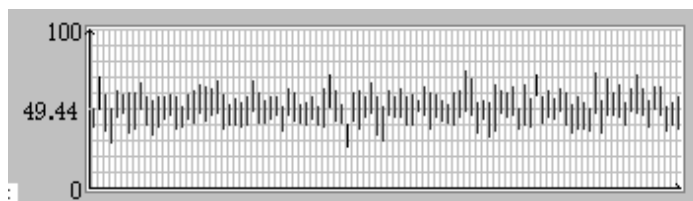
信頼率は統計量を使用する目的に応じて決定する。95%信頼区間の場合、100回のうち5回、区間推定の値に母集団の平均が含まれない（すなわち推定を誤る）ということが起こる。信頼率を高める、例えば100%にしたらいのではないかと考える人もいるかもしれないが、そのときには信頼区間はきわめて大きくなり、役に立たない。例えば、視聴率の100%信頼区間は0~100%だというようなもので、疑いはできないが、この数値では何の役にも立たない。信頼率は必要に応じた大きさを設定する。

標本数 5

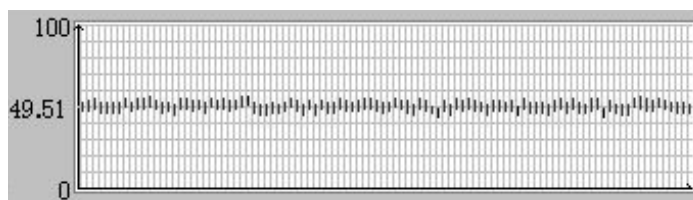


PP33 標本数を増やすと標本平均のばらつきは小さくなるから、区間推定の幅も狭くなり、平均推定の精度が高くなったことがわかる

標本数 10



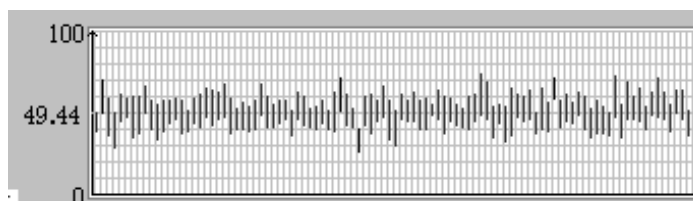
標本数 100



標本数 10

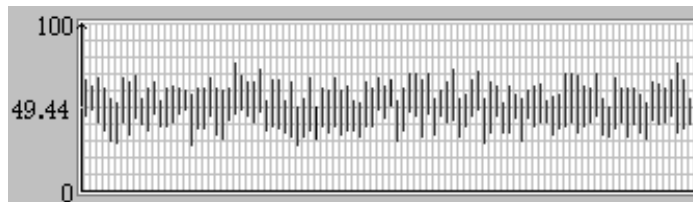
信頼率 95%

PP34 信頼率を95%から99%にあげると信頼区間が広がる



標本数 10

信頼率 99%



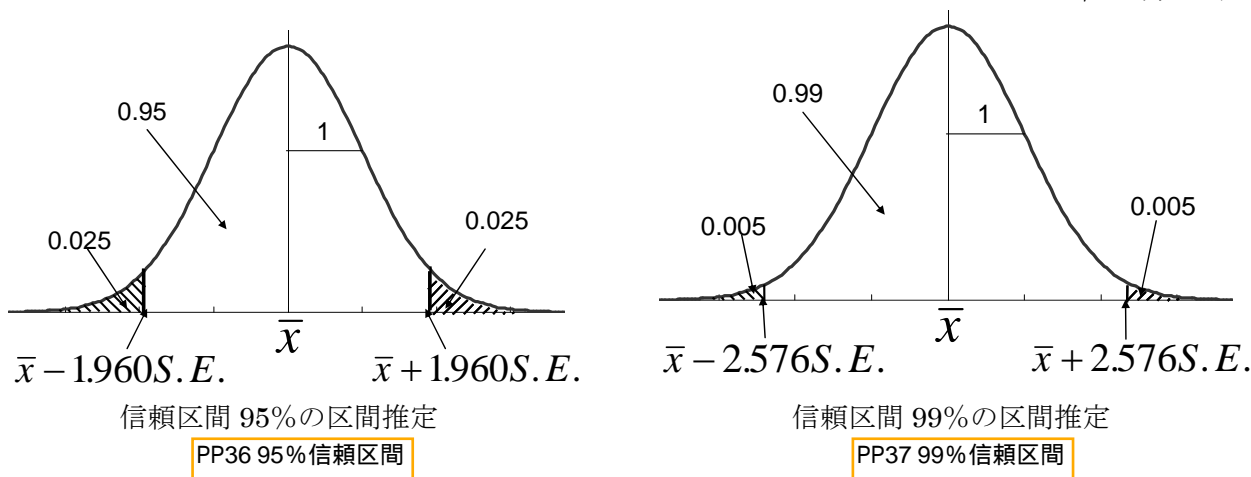
次に実際に信頼区間をつけて標本から母平均を推定してみよう。

① 標本数 n が多いとき (大標本) PP35 標本数 n が多いときの区間推定

標本数 n が多ければ、母集団の標準偏差は標本の標準偏差と同じだと見なしてよい。したがって、標本平均 \bar{x} 、標本標準偏差 s とすると、

$$\text{標準誤差 } S.E. = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

となり、正規分布の性質から 95%の確率で母平均 μ は $\bar{x} - 1.960S.E. \leq \mu \leq \bar{x} + 1.960S.E.$ の範囲にあり、99%の確率で $\bar{x} - 2.576S.E. \leq \mu \leq \bar{x} + 2.576S.E.$ の間にある。



エクセルの正規分布に関する関数から、信頼率 $p\%$ における母平均の区間推定を計算できる。
すなわち標本数 n 、標本平均 \bar{x} 、標本標準偏差 s 、標本の標準誤差 SE とすると、信頼率 $p\%$ における区間推定は、PP38 エクセルによる信頼区間の計算

エクセルの関数 $NORMINV$ を利用して、母平均は

$$NORMINV((1 - p/100)/2, \bar{x}, SE) \leq \mu \leq NORMINV(1 - (1 - p/100)/2, \bar{x}, SE)$$

あるいは

$$NORMINV((1 - p/100)/2, \bar{x}, s/\sqrt{SQRT(n)}) \leq \mu \leq NORMINV(1 - (1 - p/100)/2, \bar{x}, s/\sqrt{SQRT(n)})$$

と計算できる。PP39 $p\%$ 信頼区間

例 100個のトマトの重さを量ったときに平均 120.00g、標準偏差 10.00g だった。95%信頼区間と 99%信頼区間をつけて母平均を区間推定せよ。PP40 区間推定の例題

95%信頼区間 $120 - 10/\sqrt{100} \times 1.960 \leq \mu \leq 120 + 10/\sqrt{100} \times 1.960$

$$118.04 \leq \mu \leq 121.96$$

99%信頼区間 $120 - 10/\sqrt{100} \times 2.576 \leq \mu \leq 120 + 10/\sqrt{100} \times 2.576$

$$117.42 \leq \mu \leq 122.58$$

前述のトマトの例をエクセルで計算すると以下ようになる。

95%信頼区間をつけた区間推定

PP41 エクセルでの信頼区間の計算 (例題)

=NORMINV((1-95/100)/2,120,10/SQRT(100))	118.04
=NORMINV(1-(1-95/100)/2,120,10/SQRT(100))	121.96

99%信頼区間をつけた区間推定

=NORMINV((1-99/100)/2,120,10/SQRT(100))	117.4242
=NORMINV(1-(1-99/100)/2,120,10/SQRT(100))	122.5758

練習 100個のトマトの重さを量ったときに平均 120.00g, 標準偏差 10.00g だった. 90%信頼区間をつけて母平均を区間推定せよ.

PP42 エクセルによる信頼区間の計算 (練習問題)

質問 1名

=NORMINV((1-90/100)/2,120,10/SQRT(100))	118.3551
=NORMINV(1-(1-90/100)/2,120,10/SQRT(100))	121.6449

$$118.355 \leq \mu \leq 121.645 (g)$$

★ 信頼率としては 95%あるいは 99%を使うことが多いので, 信頼率 95%の信頼区間の式 $\bar{x} - 1.960S.E. \leq \mu \leq \bar{x} + 1.960S.E.$ および信頼率 99%の信頼区間の式 $\bar{x} - 2.576S.E. \leq \mu \leq \bar{x} + 2.576S.E.$ を覚えておくと便利である.

PP43 よく使う信頼区間

② 標本数 n が少ないとき (小標本)

このときは標本の標準偏差 s から母集団の標準偏差 σ を推定する誤差が大きいため, 正規分布ではなく t 分布で推定する. 詳細は第 7 回の授業で行う.

PP44 標本数 n が少ないときの区間推定

D. 宿題

1. 第 1 回の宿題および第 3 回の宿題 3. で調べたデータについて標準誤差を求めよ. 第 1 回の宿題の標準誤差の計算はエクセルの関数を使い, 第 3 回の宿題の標準誤差の計算は分析ツールを使って行え. 次に母集団の母平均を 90%信頼区間, 95%信頼区間および 99%信頼区間をつけて, 区間推定せよ.

2. 次回の授業ではあるデータが正規分布あるいは二項分布に基づく仮定して, 統計的に検定を行う. 例えば, 平均 μ , 標準偏差 σ の正規分布では平均から 3σ 以上離れた値の出現する確率は 0.3%位しかない. このことから逆に, もしそのような値が得られたら, 元の平均と標準偏差が怪しいと考えることもできる. このような考え方を統計的検定という. 今回は次の実験を行う.

全く実力の同じ者が勝負をすれば, 勝つ確率は 2 分の 1 であるといえる. 逆に実力が違えば, 勝つ確率はその実力差に応じて変わると考えられる. このとき n 回勝負したときに, x 回勝つ確率は二項分布に従うと見なせる.

★ 2 人で行う勝負 (じゃんけん, 将棋, 相撲何でもよい) を 20 回以上行え. もし実力が同じだとした場合, 今回の実験で得られた結果が起こる確率を二項分布を使って求めよ. その確率から, 両者の実力に差があるのか, ないのかを考えて見よ. (2 人 1 組の班で調査してかまわない. 相手がコンピューターでもよい.) なおじゃんけんのような場合では勝つ確率を 2 分の 1 として考えること (決着が付くまでじゃんけんをすることによってあいこは勘定しない).