実験計画学
2007 年 12 月 18 日

第１０回　分散分析その２　二元配置

Ａ．一元配置の分散分析（先週の復習をかねて）

一元配置の分散分析では
総変動＝処理による変動（主効果）＋誤差変動
に分解することができた．

例：ハムスターをひまわり，大豆，人工餌の３種類のどれで育てるのが一番よいかを実験した．

元のデータ

	ひまわり	大豆	人工餌
1	17	15	19
2	15	12	14
3	18	10	17
4	12	12	17
5	16	10	21

総変動＝処理による変動＋誤差変動

	ひまわり	大豆	人工餌
1	2	0	4
2	0	−3	−1
3	3	−5	2
4	−3	−3	2
5	1	−5	6

処理による変動

	ひまわり	大豆	人工餌
1	0.6	-3.2	2.6
2	0.6	-3.2	2.6
3	0.6	-3.2	2.6
4	0.6	-3.2	2.6
5	0.6	-3.2	2.6

誤差変動

	ひまわり	大豆	人工餌
1	1.4	3.2	1.4
2	-0.6	0.2	-3.6
3	2.4	-1.8	-0.6
4	-3.6	0.2	-0.6
5	0.4	-1.8	3.4

処理による変動が誤差による変動に比べて，十分に大きいのか（正確には処理による変動と誤差による変動は等しいという帰無仮説が棄却できるのか）をＦ検定で検討する．
帰無仮説：　効果による変動と誤差による変動には差がない．
上の帰無仮説のいうことは下の図のように読み替えることもできる

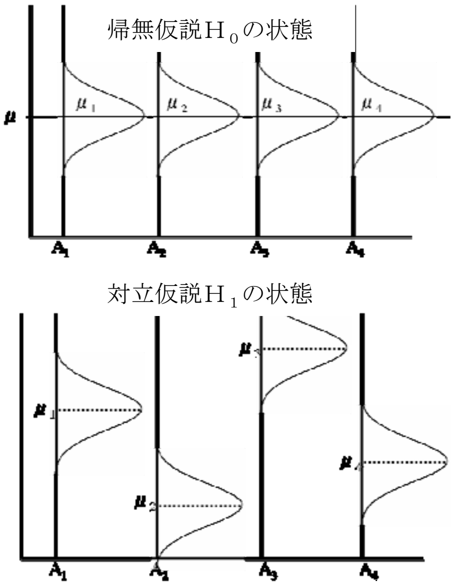


図　分散分析における帰無仮説（上）と対立仮説（下）

帰無仮説：$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$　どの水準でも母平均は同じである
対立仮説：水準（処理）間の母平均のどれか一つは異なる

次の分散比Ｆを計算し，この分散比が得られる確率 p-値を計算する（実際はエクセルなどのソフトがデータを入力しただけで p-値を計算する）

$$F = \frac{効果のばらつきの大きさ}{誤差のばらつきの大きさ} = \frac{効果の分散}{誤差の分散} = \frac{V_1}{V_2}$$

有意水準 1%で処理間に有意差があった．餌の違いはハムスターの成長を変えると結論できる．

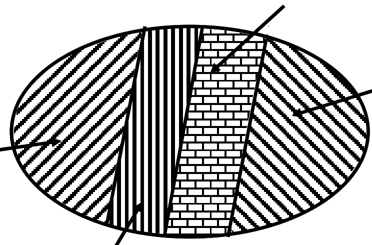
B．分散分析の拡張

①　２つ以上の要因があるときに，それぞれの要因と誤差の変動に分けることができないか？

一元配置の分散分析では　総変動＝処理による変動＋誤差変動　に分解することができた.

処理が２つになった場合，処理Ａ，処理Ｂそれぞれについて
総変動＝処理Ａによる変動＋処理Ｂによる変動＋誤差変動
に分解できないか？

そうすると誤差変動に対して，処理Ａ，処理Ｂの変動をそれぞれＦ検定できるのではないか？



②　別々に実験した方が効率がよい？

例：おいしいパンを焼くオーブンの温度と焼く時間を決めたい.
因子Ｘ：オーブンの温度３段階，因子Ｙ：焼く時間３段階

別々に実験すると
温度実験　（　　）段階×（　　）反復＝（　　）個の実験
時間実験　（　　）段階×（　　）反復＝（　　）個の実験
あわせて（　　）個の実験

組み合わせた実験をする
温度（　　）段階×時間（　　）段階×（　　）反復＝（　　）個の実験

③　最適な水準をみつける

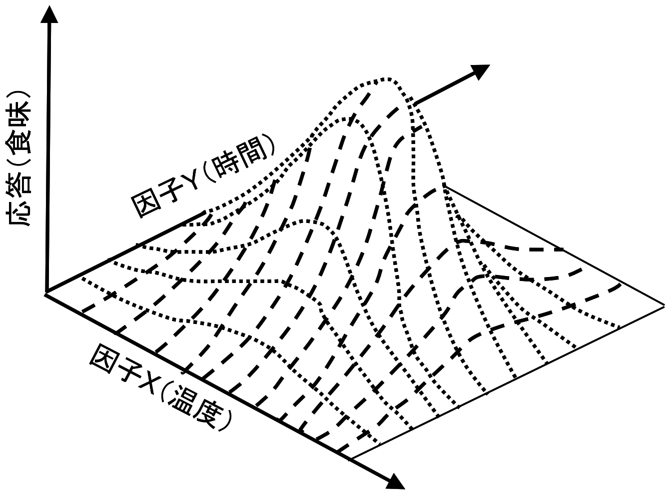


図　２因子に対する応答曲面

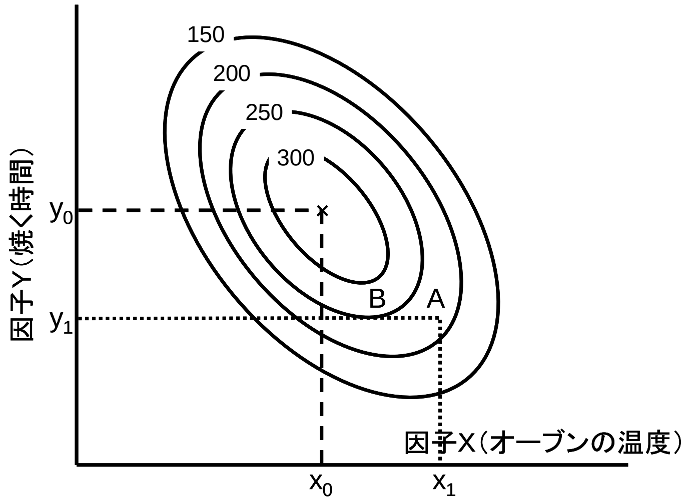


図　２因子応答曲面の等高線図

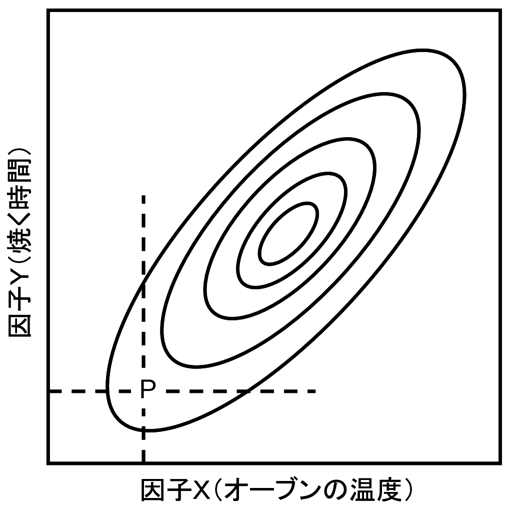


図　最適な水準に到達しない実験例
　上の例では因子Ｘを固定したまま，因子Ｙの水準を変えても応答は下がる．しかし，真の最適水準の組み合わせは遙かに右上にある．

　要因を一つ一つ順番に調べるやり方では要因を組み合わせた場合の最適な条件にたどり着けるとは限らない．

④　（　　　　　　　　　）を分離できないか？

２つ以上の要因を同時に比較した方がよい

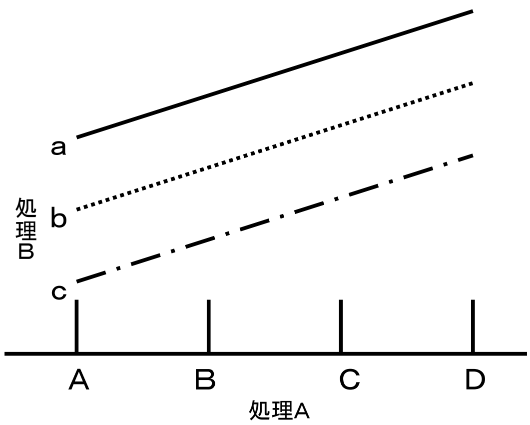
処理Ａ：ヤギの成長がよくなる薬　Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ

処理Ｂ：えさ　　　　　　　　　　　　麦わら（ａ），稲わら（ｂ），濃厚飼料（ｃ）

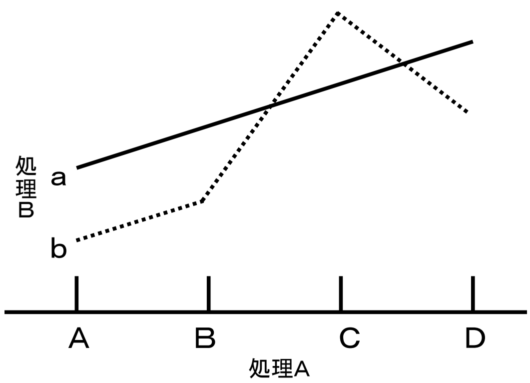
２つ以上の要因が絡んだ結果（　　　　　　　　　）を分散分析によって検出できないだろうか？

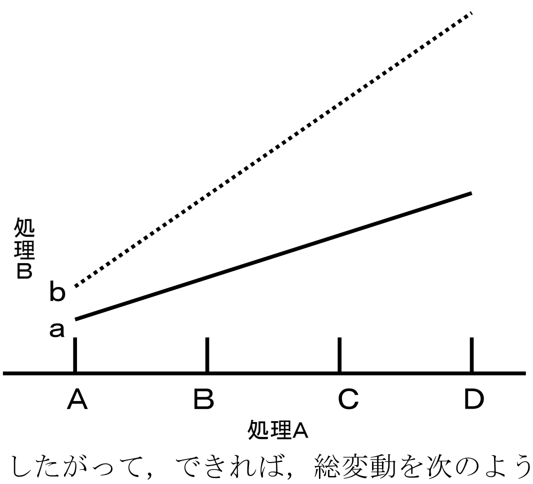
（　　　　　　　　　）がない場合

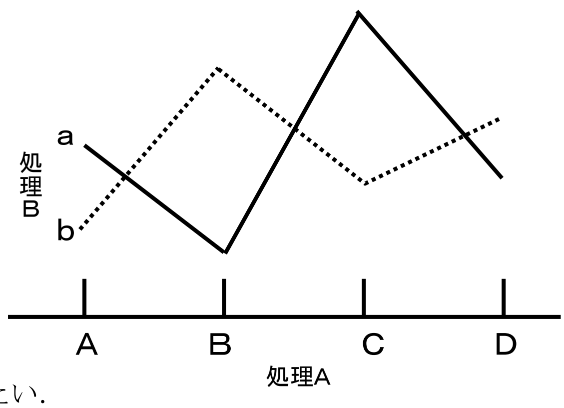
交互作用がないときは処理Ａの効果と処理Ｂの効果を組み合わせた効果はただたんに両効果を単純に足し合わせればよい.



例えば，組み合わせの妙（下図）があっても，これは単なる誤差で説明できるかもしれない.交互作用と誤差を分離できるだろうか？







したがって，できれば，総変動を次のように分解したい.

総変動＝処理Ａによる変動＋処理Ｂによる変動＋処理Ａと処理Ｂの交互作用による変動＋誤差変動

そして，誤差変動に対して，処理Ａによる変動，処理Ｂによる変動，処理Ａと処理Ｂの交互作用による変動それぞれに有意差があるのかを検定できないか.

要因実験　２つ以上の要因について同時に実験することを要因実験という

要因実験の利点

１．実験効率が高い

２．交互作用を検出できる

３．最適水準を検出できる

１．実験効率が高い

別々に実験すると　２反復で，１２個の実験

高温－１	中温－１	低温－１
高温－２	中温－２	低温－２

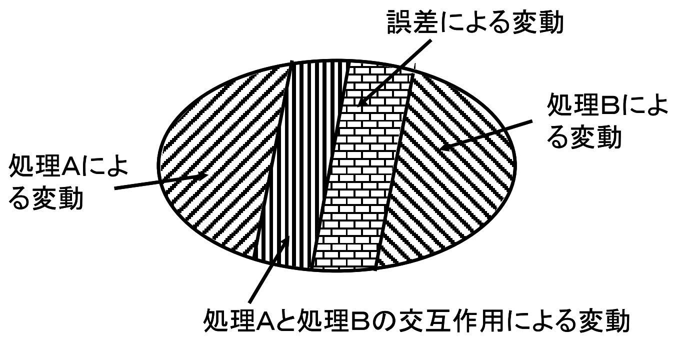
１時間－１	２時間－１	３時間－１
１時間－２	２時間－２	３時間－２

組み合わせ実験

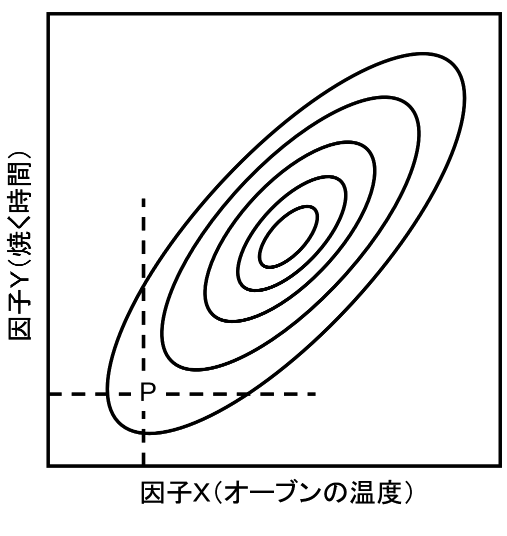
高温・１時間	中温・１時間	低温・１時間
高温・２時間	中温・２時間	低温・２時間
高温・３時間	中温・３時間	低温・３時間

交互作用がなければ上の実験で温度について３反復，時間についても３反復の実験と考えられる．すなわち別々にやるより，反復数も多く，回数も少なくてすむので，実験効率が高い．

２．交互作用を検出できる



３．最適水準を検出できる



C．繰り返しのない二元配置の分散分析（交互作用は検出できない）

１．どのように変動を分解するか？

例：ハムスターをひまわり，大豆，人工餌の３種類の餌と水道，井戸水，海洋深層水，蒸留水の４つの水のどれで育てるのが一番よいかを実験した．

①　実験結果に全く誤差がなく，水の効果だけが現れたらどうなるか？

全く差がない場合，
実験結果は下のようになる

	水道	井戸	深層	蒸留
ひまわり	15	15	15	15
大豆	15	15	15	15
人工餌	15	15	15	15

水の効果に差があるなら
(効果の合計=0)

	水道	井戸	深層	蒸留
ひまわり	0	1	2	−3
大豆	0	1	2	−3
人工餌	0	1	2	−3

左の２つを足すと
実験結果は下のようになる

	水道	井戸	深層	蒸留
ひまわり				
大豆				
人工餌				

②　実験結果に餌の効果が現れたらどうなるか？

水の効果が誤差なく発揮されると
実験結果は下のようになる

	水道	井戸	深層	蒸留
ひまわり				
大豆				
人工餌				

餌の効果に差があるなら
(効果の合計=0)

	水道	井戸	深層	蒸留
ひまわり	−1	−1	−1	−1
大豆	−2	−2	−2	−2
人工餌	3	3	3	3

左の２つを足すと
実験結果は下のようになる

	水道	井戸	深層	蒸留
ひまわり				
大豆				
人工餌				

③　誤差があると実験データはどうなるか？

水と餌の効果が両方
誤差なく発揮されると
実験結果は下のようになる

	水道	井戸	深層	蒸留
ひまわり				
大豆				
人工餌				

誤差があるなら
(誤差の合計=0)

	水道	井戸	深層	蒸留
ひまわり	−1	0	0	1
大豆	2	−1	3	−2
人工餌	1	−1	−2	0

左の２つを足すと
実験結果は下のようになる

	水道	井戸	深層	蒸留
ひまわり				
大豆				
人工餌				

④　得られた実験結果から列の効果，行の効果，誤差を分離してみる．

	水道	井戸	深層	蒸留	行の合計	行の平均	行の効果
ひまわり							
大豆							
人工餌							
列の合計					総計		
列の平均					全体平均		
列の効果							

左の実験結果から行と列の効果を
それぞれ引くと誤差を分離できる

	水道	井戸	深層	蒸留
ひまわり				
大豆				
人工餌				

誤差の合計=0
誤差=データの値－全体平均
－行の効果－列の効果

⑤　総変動＝土の効果＋餌の効果＋誤差変動（繰り返しがないと交互作用は検出できない）

総変動

	水道	井戸	深層	蒸留
ひまわり				
大豆				
人工餌				

水の効果

餌の効果

誤差変動

２．分散分析表

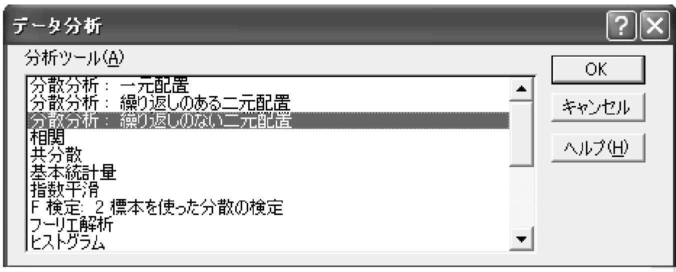
変動因	自由度 ϕ	平方和 S	分散Ｖ（平均平方）	分散比 F	p−値
餌	2	38	19	5.52*	0.044
水	3	51.33	17.11	4.97*	0.046
誤差	6	20.67	3.44		
全体	11	110			

繰り返しのない二元配置の分散分析では２つの帰無仮説をそれぞれ同時に検定する．

帰無仮説　１）餌の効果がない　　　　　　対立仮説　１）餌の効果がある
　　　　　２）水の効果がない　　　　　　　　　　　２）水の効果がある

以上の結果から，餌の処理と水の処理のそれぞれに（　　）％の有意水準で有意差があった．すなわち餌の効果は（　　）％の有意水準で認められ，水の効果も（　　）％の有意水準で認められた．この場合，餌は（　　　　），水は（　　　　）の組み合わせがハムスターの成長に最もよいことになる．

３．エクセルによる繰り返しのない二元配置の分散分析



分散分析：繰り返しのない二元配置

概要	標本数	合計	平均	分散
ひまわり	4	56	14	3.333333333
大豆	4	54	13.5	17.66666667
人工餌	4	70	17.5	3
水道水	3	47	15.66667	9.333333333
井戸水	3	46	15.33333	6.333333333
深層水	3	52	17.33333	1.333333333
蒸留水	3	35	11.66667	12.33333333

分散分析表

変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値
行	38	2	19	5.516129032	0.043716	5.143249
列	51.33333	3	17.11111	4.967741935	0.045799	4.757055
誤差	20.66667	6	3.444444			
合計	110	11				

D．繰り返しのある二元配置の分散分析（交互作用の検出ができる）

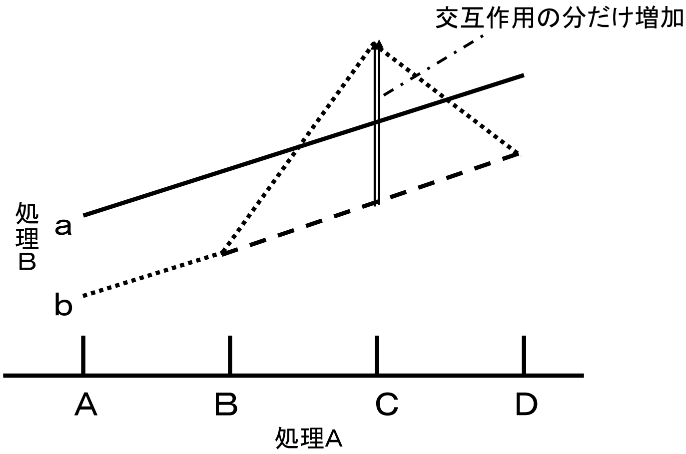
1．交互作用の存在を見抜く

先述の例では生のデータを見る限りでは（　　　　　）と（　　　　　）の組み合わせがいちばんよい結果を出したのに対し，分散分析の結果からは（　　　　　）と（　　　　　）の組み合わせがいちばんよいという結論になった．しかし，これは交互作用を考慮していないからである．このように処理間に交互作用のあるときは繰り返しのない分散分析では，誤った結果を出す危険がある．

2．交互作用をどのようにして検出するのか？

交互作用がないときは複数の処理を組み合わせたときの効果は単純にそれぞれの処理を足し合わせた効果となる．

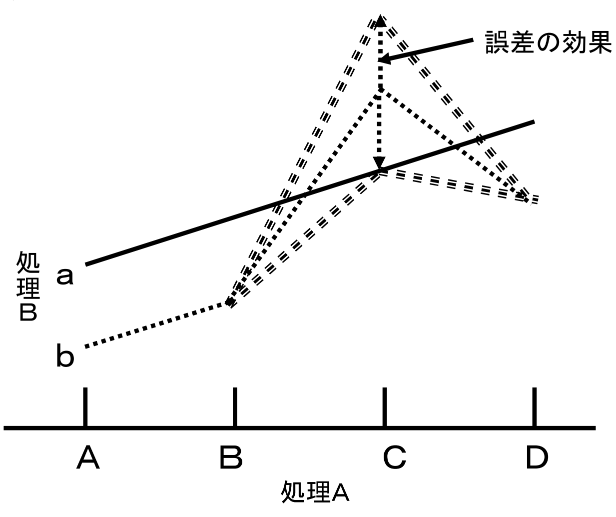
総変動＝処理Ａによる変動＋処理Ｂによる変動＋誤差変動



交互作用があるときは，右上の図のように交互作用の分だけ平行線から反応がずれることになる．

繰り返しがないと右上の図の交互作用だけとみられる反応の大きさのうち，実際の交互作用の大きさと誤差の大きさを分離することができない．誤差が 0 であれば，すべて交互作用によると考えることになるが，誤差は 0 ではありえない．しかも誤差を 0 にしてしまうと，処理それぞれの効果や交互作用の効果の大きさを誤差分散と比較する分散分析ができない．したがって，交互作用を見積もるためには繰り返し（反復）が必要である．

繰り返しがあると誤差は右のように検出することが可能である．詳しい計算方法はホームページを参照のこと．



繰り返しのある二元配置の分散分析表はふつう，下のように書く．

処理（要因）	平方和Ｓ	自由度 ϕ	平均平方（分散）	分散比（Ｆ値）	p-値
餌（A）	S_A	ϕ_A	$V_A = S_A / \phi_A$	V_A / V_E	p_A
水（B）	S_B	ϕ_B	$V_B = S_B / \phi_B$	V_B / V_E	p_B
餌×水（A×B）	$S_{A\times B}$	$\phi_{A\times B}$	$V_{A\times B} = S_{A\times B} / \phi_{A\times B}$	$V_{A\times B} / V_E$	$p_{A\times B}$
誤差（E）	S_E	ϕ_E	$V_E = S_E / \phi_E$		
合計	S_T	ϕ_T			

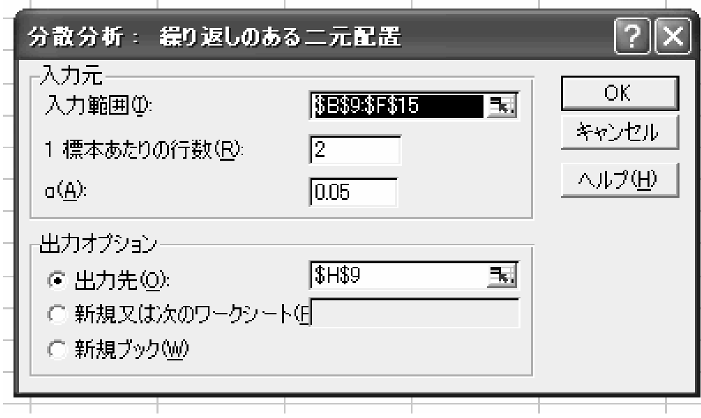
自由度と平方和には加法性がある．すなわち自由度：$\phi_T = \phi_A + \phi_B + \phi_{A\times B} + \phi_E$，
平方和：$S_T = S_A + S_B + S_{A\times B} + S_E$

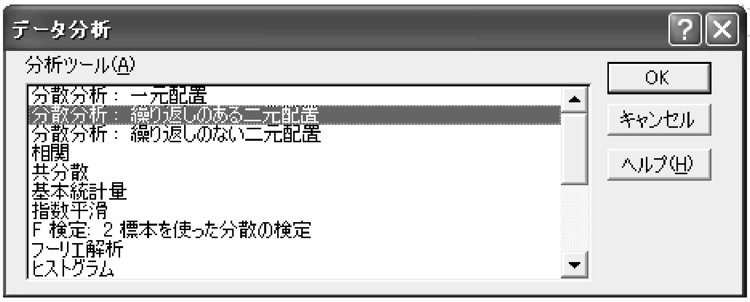
３．エクセルによる繰り返しのある二元配置の分散分析

帰無仮説　１）　餌の効果がない
　　　　　２）　水の効果がない
　　　　　３）　餌の効果と水の効果の間に交互作用がない

対立仮説　１）　餌の効果がある
　　　　　２）　水の効果がある
　　　　　３）　餌の効果と水の効果の間に交互作用がある

	水道水	井戸水	深層水	蒸留水
ひまわり	12	13	16	11
	14	17	16	13
大豆	14	13	17	7
	16	13	19	9
人工餌	19	17	17	14
	19	19	19	16





分散分析：繰り返しのある二元配置

概要	水道水	井戸水	深層水	蒸留水	合計
ひまわり					
標本数	2	2	2	2	8
合計	26	30	32	24	112
平均	13	15	16	12	14
分散	2	8	0	2	4.571429
大豆					
標本数	2	2	2	2	8
合計	30	26	36	16	108
平均	15	13	18	8	13.5
分散	2	0	2	2	16
人工餌					
標本数	2	2	2	2	8
合計	38	36	36	30	140
平均	19	18	18	15	17.5
分散	0	2	2	2	3.428571
合計					
標本数	6	6	6	6	
合計	94	92	104	70	
平均	15.66667	15.33333	17.33333	11.66667	
分散	8.266667	7.066667	1.866667	11.06667	

分散分析表						
変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値
標本	76	2	38	19	0.000191	3.88529
列	102.6667	3	34.22222	17.11111111	0.000124	3.4903
交互作用	41.33333	6	6.888889	3.444444444	0.032439	2.996117
繰り返し誤	24	12	2			
合計	244	23				

分散分析の結果：

1）餌の効果は p-値が 0.000191 なので，有意水準 0.1%で帰無仮説は棄却され，餌の効果が認められた．

2）水の効果は p-値が 0.000124 なので，有意水準 0.1%で帰無仮説は棄却され，水の効果が認められた．

3）餌の効果と水の効果の間の交互作用は p-値が 0.032 なので，有意水準 5%で帰無仮説は棄却され，交互作用が認められた．

E．エクセル・分析ツールによる分散分析の例

1．繰り返しのない二元配置の例

ヤギに与えると成長がよくなるという5種類の薬品（対照区を含む）とふだんの餌5種類との二元配置の分散分析

	麦わら	稲わら	牧草	濃厚飼料	雑草
対照区	11	5	−1	−4	2
A	29	17	14	2	20
B	8	14	20	20	26
C	23	8	8	11	5
D	26	20	11	5	17

分散分析: 繰り返しのない二元配置

概要	標本数	合計	平均	分散
対照区	5	13	2.6	33.3
A	5	82	16.4	96.3
B	5	88	17.6	46.8
C	5	55	11	49.5
D	5	79	15.8	65.7
麦わら	5	97	19.4	87.3
稲わら	5	64	12.8	38.7
牧草	5	52	10.4	60.3
濃厚飼料	5	34	6.8	83.7
雑草	5	70	14	103.5

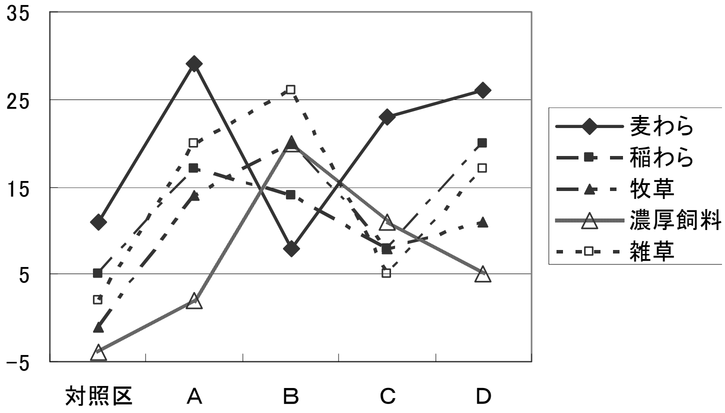
分散分析表						
変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値
行	761.04	4	190.26	4.15324165	0.017033	3.006917
列	433.44	4	108.36	2.365422397	0.096597	3.006917
誤差	732.96	16	45.81			
合計	1927.44	24				

検定結果　行は横，列は縦をさす．この場合，行は薬の種類，列は餌の種類となる．

繰り返しのない二元配置の分散分析では２つの帰無仮説をそれぞれ同時に検定する．帰無仮説は１）薬の効果がない，２）餌の効果がないの２つである．

行（薬の種類）の p−値は（　　　　　）なので，薬の効果は（　　）％の有意水準で（有意である・有意でない）．列（餌の種類）の p−値は（　　　　　）なので，餌の効果は（　　）％の有意水準で（有意である・有意でない）．

繰り返しのない二元配置では交互作用の大きさは検出できない．しかしグラフを書いてみると交互作用がありそうかどうかはわかる．



２．　繰り返しのある二元配置

ヤギに与えると成長がよくなるという5種類の薬品（対照区を含む）とふだんの餌5種類との二元配置の分散分析

	麦わら	稲わら	牧草	濃厚飼料	雑草
対照区	5	4	0	−8	4
	17	6	−2	0	0
A	20	10	11	4	16
	38	24	17	0	24
B	10	13	22	15	19
	6	15	18	25	33
C	19	9	8	9	8
	27	7	8	13	2
D	29	15	10	−1	15
	23	25	12	11	19

分散分析表

変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P−値	F 境界値
標本	1522.08	4	380.52	11.74444444	1.66E−05	2.758711
列	866.88	4	216.72	6.688888889	0.000837	2.758711
交互作用	1465.92	16	91.62	2.827777778	0.009702	2.069086
繰り返し誤差	810	25	32.4			
合計	4664.88	49				

検定結果　行は横，列は縦をさす．この場合，行は薬の種類，列は餌の種類となる．

繰り返しのある二元配置の分散分析では３つの帰無仮説をそれぞれ同時に検定する．帰無仮説は１）薬の効果がない，２）餌の効果がない，３）薬の効果と餌の効果の間に交互作用がない，の３つである．

行（薬の種類）の p−値は（　　　　　）なので，薬の効果は（　　）％の有意水準で（有意である・有意でない）．列（餌の種類）の p−値は（　　　　　）なので，餌の効果は（　　）％の有意水準で（有意である・有意でない）．行と列の間，すなわち薬の効果と餌の効果の間の交互作用は，p−値が（　　　　　）なので，（　　）％の有意水準で（有意である・有意でない）．

３．　交互作用のあるときの解釈

主効果を考察する前に交互作用が有意であるかを確認しておく必要がある．交互作用がある場合には，主効果を単独で議論することができないことがあるからである．

交互作用のないときは主効果それぞれを別々に論じても問題がない．例えば先述の餌と水を組み合わせた実験の場合，もし交互作用が有意でなければ，餌だけをみて，人工餌が最もよいと結論しても問題ないし，水だけを見て深層水が最もよいと結論しても問題ない．

もし交互作用があるときは，餌だけを見て人工餌が最もよいと判断するのは問題である．餌と水の組み合わせの妙があるのか，相乗効果があるのか，あるいはうち消しあうのかはグラフを書いて判断するのがよい．また，交互作用の分散が主効果と同じくらいに大きい場合は主効果を単独で論じるのはほとんど無意味である．一方，交互作用が有意であっても，主効果の分散が交互作用の分散よりもかなり大きければ，主効果単独の効果を論じてもかまわない．ヤギの例では薬の効果の分散 380.52 と交互作用の分散 91.62 よりかなり大きいので, 薬単独の効果を論じることも可能である．

Ｆ．宿題

１．先週の宿題３．で得たデータについて，以下のことを行え．

①　繰り返しのある二元配置の分散分析を行え．

②　交互作用については有意差があるなしに関わらず，各処理の反復間の平均値を使って，グラフを書き，どのような交互作用があるのか（相乗効果，組み合わせの妙など）を考えよ．

③　さらに交互作用の大きさと主効果の大きさを比較し，検討せよ．

２．第１回の講義でごく簡単にフィッシャーの三原則について説明した．フィッシャーの三原則とは，①　反復，②　無作為化，③　局所管理　である．

局所管理の例として，５品種の水稲について収量を比較する実験を考えてみよう．１つの品種について１反復について 20m² の水田が必要であるとしよう．３反復の実験を行うので，20×3×5 で 300m² の水田が必要となる．300m² の水田が地力ムラのない均一な水田であれば何の問題もないが，現実にはそのような水田はほとんど見つからないであろう．こういうとき反復ごと，すなわち比較したい５つの品種が１セットはいる水田はなるべく均一になるようにして，100m² のブロックを 3 つ作る．これが局所管理である．水田の中で，地力の高いところ，中くらいのところ，低いところの３つに分け，３つのブロック内では土を混ぜるなどの操作でムラをなるべく減らすようにする．

さて，このような局所管理は実験のいろいろな場面で要求される．以下の実験では，どのような局所管理が必要かを考えて見よ．

Ａ．何人かのモニターに３種類のレトルトカレーの新製品を試食してもらう．

Ｂ．５種類のガソリンの性能をテストした．ガソリンを別々の車に入れ，一日，所定のコースを走らせて，燃費，排気ガス，その他を調べた．この実験を数日行った．

Ｃ. 実験に未熟な３人が５種類のトマトの酸度について, ビューレットで滴定する方法で調べた．

Ｄ．日当たりのあまりよくない谷間で５品種の柿の収量実験を行う．