

第 8 回 t 分布と t 検定

A. t 分布（小標本に関する平均の推定と検定）

前々回と前回の授業では、標本が十分に大きいあるいは母分散が既知であることを条件に正規分布を用いて推定・検定した。しかし、母集団が正規分布し、標本が小さい場合には、標本分散から母分散を推定するときの不確実さを加味した t 分布を用いて推定・検定しなければならない。t 分布は標本分散の自由度 f (ふつう $f=n-1$) によって分布が決まる。標本数 n が増えると t 分布は正規分布に近づき、 $n=\infty$ のときに正規分布と一致する。

t 分布は、標本が少ないときに、標本標準偏差から母標準偏差を推定する誤差を含むので、正規分布よりばらつきの大きな分布（中央の山は低く、左右の裾は高くなる）となる。

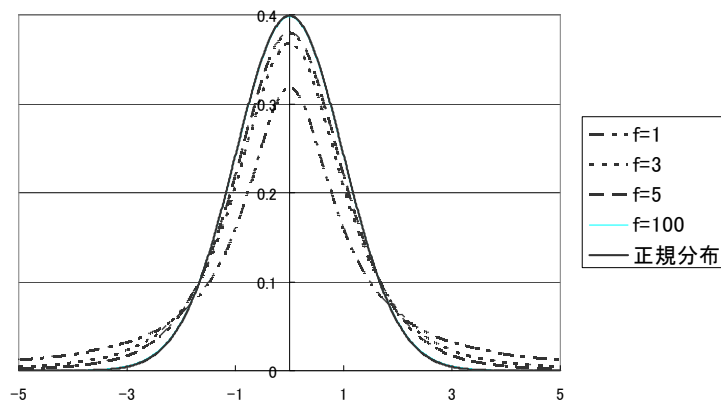


図 t 分布と正規分布 ($n=\infty$ のとき t 分布は正規分布と一致する)

B. t 分布による区間推定

母平均 μ の推定方法（母分散 σ^2 は未知である）

基本的な考え方は正規分布を用いた区間推定と同じである。

点推定： すなわち標本平均をそのまま母平均の点推定に使う。つまり、 $\mu = \bar{x}$ である。

区間推定： 母集団が正規分布するとき、信頼率 $p\%$ のときの母平均 μ の信頼区間は、エクセルでは TINV 関数を用いて計算できる。ここではデータをシートに代入すると計算できるようにした（100 個以内のデータに限る。100 個以上のデータは第 6 回の正規分布を元にしたシートでよい）

下の測定値にデータ(100個以内)を入れるとt分布に基づく信頼率p%の区間推定,あるいは有意水準p%のときに帰無仮説:母平均 μ を指定した値の場合の有意確率p-値を自動的に計算する。ただし測定値に値を誤入力したときはDelキーで削除すること。セルを移動させると式が変わってしまう。

標本番号	測定値			
1		t分布に基づく区間推定		
2				
3		信頼率		%
4				
5		上限		
6		下限		
7				
8		母平均の点推定		
9		±		

例：A公園の桜から 6 本を無作為に選び、木に着く花の数を数えた．123,156,168,190,211,234 の 6 つのデータを得た．A公園の桜の花の数（平均）を 95%信頼区間および 99%信頼区間をつけて推定せよ．

データをシートに代入（コピー）すると自動的に計算する．

標本番号	測定値		
1	123	t分布に基づく区間推定	
2	156		
3	168	信頼率	95 %
4	190		
5	211	上限	222.1671
6	234	下限	138.4996
7			
8		母平均の点推定	180.3333
9		±	41.83376

t分布に基づく区間推定	
信頼率	99 %
上限	245.9526
下限	114.7141
母平均の点推定	180.3333
±	65.61926

95%信頼区間をつけた推定値は

() $\leq \mu \leq$ ()

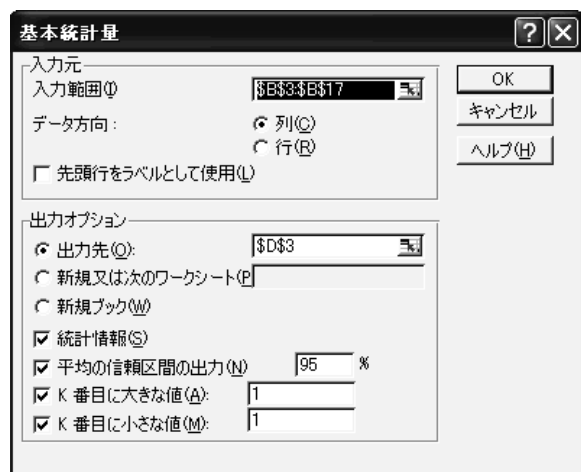
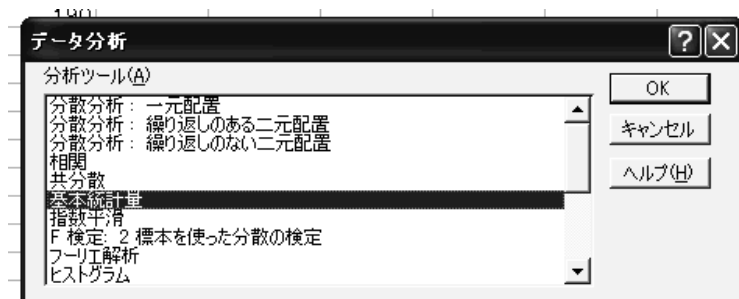
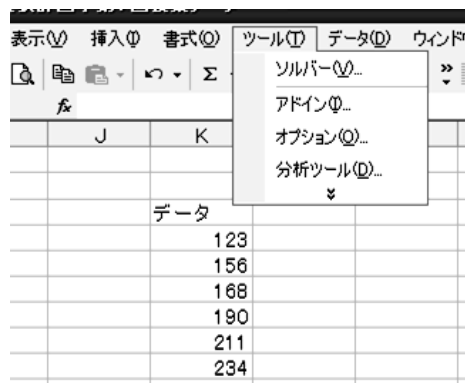
あるいは $\mu =$ () $\pm$ () と表記してもよい．

99%信頼区間をつけた推定値は

() $\leq \mu \leq$ ()

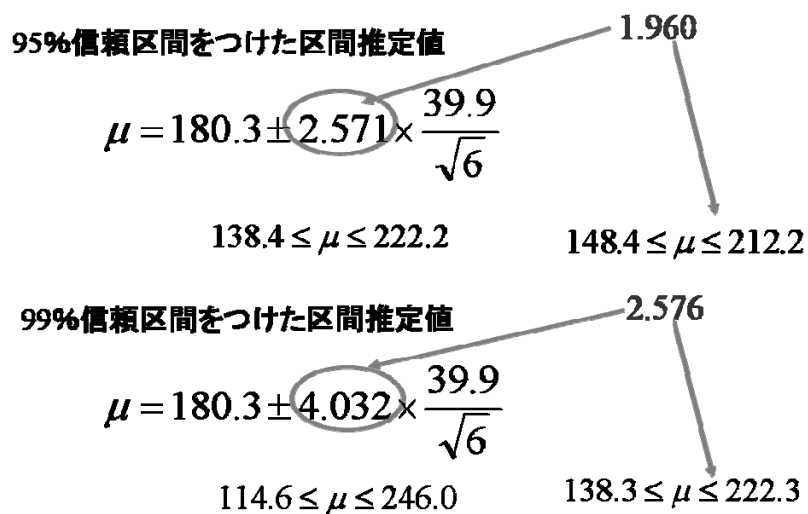
あるいは $\mu =$ () $\pm$ () と表記してもよい．

★ エクセルの分析ツール→基本統計量による計算の仕方



	K	L	M	N	O	P	Q
1							
2							
3	データ		列1				
4	123						
5	156		平均	180.3333		138.4996 =N5-N20	
6	168		標準誤差	16.27404		222.167 =N5+N20	
7	190		中央値 (メジアン)	179			
8	211		最頻値 (モード)	#N/A			
9	234		標準偏差	39.8631			
10			分散	1589.067			
11			尖度	-0.60399			
12			歪度	-0.09678			
13			範囲	111			
14			最小	123			
15			最大	234			
16			合計	1082			
17			標本数	6			
18			最大値(1)	234			
19			最小値(1)	123			
20			信頼区間(95.0%)	41.83369			
21							

★ 母標準偏差が既知であるとしたときにはどのくらい推定値の信頼区間が小さくなるか



練習 1 : M大学の学生から 20 人を無作為に選び, 立ち幅跳びをした結果, 以下のデータを得た.

95%信頼区間をつけて, 母平均を区間推定せよ.

番号	距離m
1	1.25
2	1.41
3	1.21
4	1.34
5	1.43
6	1.27
7	1.29
8	1.16
9	1.33
10	1.3
11	1.12
12	1.17
13	1.15
14	1.25
15	1.26
16	1.13
17	1.19
18	1.28
19	1.28
20	1.37

95%信頼区間をつけた推定値は

() $\leq \mu \leq$ ()

あるいは $\mu =$ () $\pm$ ()

C. t 検定

1. ある決まった平均に対する検定

例：T 食堂のラーメンの大盛りはライバル店 K レストランより 50g 多いと主張している。K 君は T 食堂で 10 回ラーメンの大盛りを注文し、こっそり重さを調べた結果、以下のような結果を得た。50g 多いという T 食堂の主張を検定せよ。

標本番号	測定値
1	48
2	46
3	49
4	50
5	48
6	51
7	42
8	52
9	44
10	50

帰無仮説： $H_0: \mu = 50g$ ，ラーメンの大盛りは 50g 多い

対立仮説： $H_1: \mu \neq 50g$ ，ラーメンの大盛りは 50g 多くない

① 有意水準を設定する。この場合、有意水準を 5%としてみよう。

② p-値を計算する。TDIST というエクセルの関数で計算できる。ここではデータをシートに代入すると計算できるようにした（100 個以内のデータに限る。100 個以上のデータは第 7 回の正規分布を元にしたシートでよい）

帰無仮説が成り立つとして、今回の結果が得られる確率はエクセルで以下のように計算できる。

t分布に基づく母平均の検定	
母平均(帰無仮説)	50
有意水準%	5
有意確率p-値	0.076553

③ 検定結果

p-値は（ ）である。したがって、有意水準 5%において、帰無仮説は（棄却された ・ 棄却できない）ので、T 食堂のラーメンの大盛りは K レストランより 50g（多い ・ 多いとはいえない ・ 多くない ・ 多くないとはいえない）。

練習(前述の練習と同じデータ):M大学の学生から 20 人を無作為に選び、立ち幅跳びをした結果、右のデータを得た。大学当局は学生の平均は 1.3m と主張する。この主張の是非を有意水準を 5%として t 検定せよ。

帰無仮説 H_0 :

対立仮説 H_1 :

番号	距離m
1	1.25
2	1.41
3	1.21
4	1.34
5	1.43
6	1.27
7	1.29
8	1.16
9	1.33
10	1.3
11	1.12
12	1.17
13	1.15
14	1.25
15	1.26
16	1.13
17	1.19
18	1.28
19	1.28
20	1.37

p-値＝

検定結果：

5%の有意水準で帰無仮説は（ 棄却できる ・ 棄却できない ）

大学当局の主張は（ 誤りである ・ 誤りであるとはいえない ）

しかし，こういう場合は母平均の区間推定値を示す方がよい $1.22 \leq \mu \leq 1.30$

2. 2つの母集団からの小標本の検定

① 対応のないデータのときの t 検定

2つの独立した母集団から得た2つの小標本の平均に関する検定はt分布に基づいて行う。

例：T牧場とW牧場のニワトリの卵を10個ずつ調査し，それぞれ右下の表のようなデータを得たとなった．両牧場の卵の重さの母平均は違うのかを検定せよ．

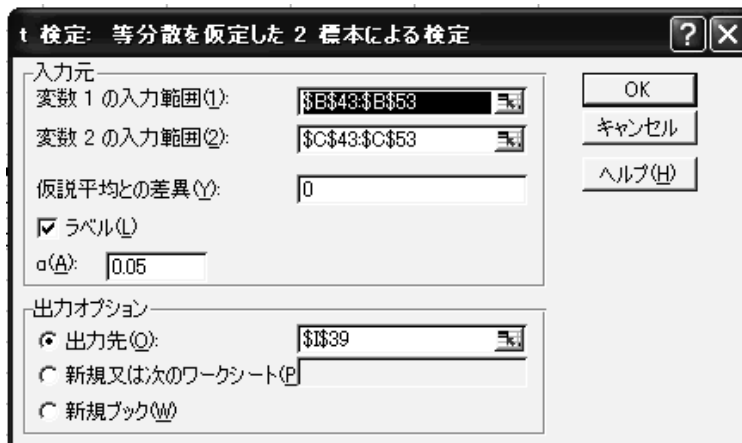
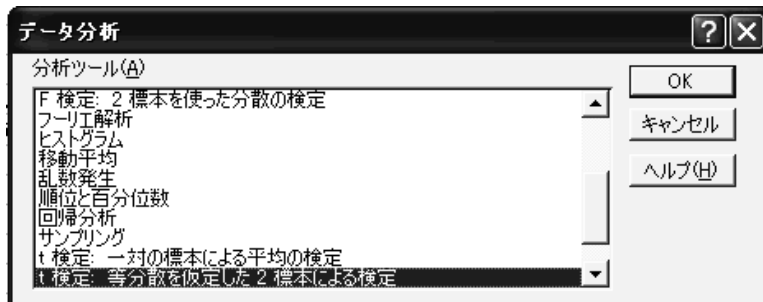
帰無仮説 $H_0: \mu_T = \mu_W$ 両牧場の卵の重さ（の母平均）は等しい

対立仮説 $H_1: \mu_T \neq \mu_W$ 両牧場の卵の重さ（の母平均）は異なる

ここでは有意水準を5%としてみよう．

帰無仮説が成り立つとしたときに今回のデータが得られる確率である
p-値はエクセルの分析ツールのt検定：等分散を仮定した2標本による
検定で計算できる．

T牧場	W牧場
66.3	64.4
67.5	65.3
68.8	65.8
66.5	66.2
65	64.1
69.1	69.6
70.3	64.4
64	64.4
69.6	68.8
70.5	64.1



t-検定：等分散を仮定した2標本による検定		
	T牧場	W牧場
平均	67.76	65.71
分散	5.084889	3.936556
観測数	10	10
プールされた分散	4.510722	
仮説平均との差異	0	
自由度	18	
t	2.15832	
P(T<=t) 片側	0.022328	
t 境界値 片側	1.734063	
P(T<=t) 両側	0.044656	
t 境界値 両側	2.100924	

2010 年 11 月 30 日

両側検定での p -値は $0.044655 < 5\%$ なので、帰無仮説は有意水準 5% で棄却された。しかし、有意水準 1% にすると棄却できない。以上のことから、有意水準 5% で T 牧場と W 牧場のニワトリの卵の重さ（の母平均）は異なると結論できる。

練習：A 地区と B 地区それぞれ地区ぐるみで健康のために減塩に取り組んだ。無作為に選んだ標本から摂取食塩量を調査した。その結果は右下の表のようになった。食塩摂取量に差はあるのかを有意水準 5% として、 t 検定せよ。

帰無仮説：

対立仮説：

p -値＝

検定結果：

有意水準 5% で帰無仮説は（棄却される ・ 棄却されない）。

A 地区と B 地区で食塩摂取量に（差がある ・ 差がない ・ 差があるとはいえない ・ 差がないとはいえない）。

A 地区	B 地区
6.0	5.6
6.2	6.4
5.8	6.8
5.6	6.6
6.0	6.0
5.9	5.8
6.4	6.2
6.8	6.6
5.4	5.9
5.8	6.3
6.2	
6.4	

② 対応のあるデータのときの t 検定

例：A, B の 2 つのハカリで同じ品物を量る。同様に 10 個の品物についてそれぞれ量って、右の表のような結果を得た。2 つのハカリの指示には差があるか。

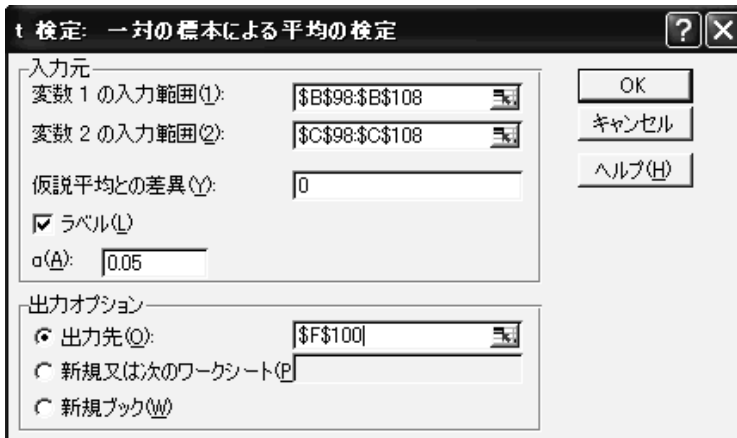
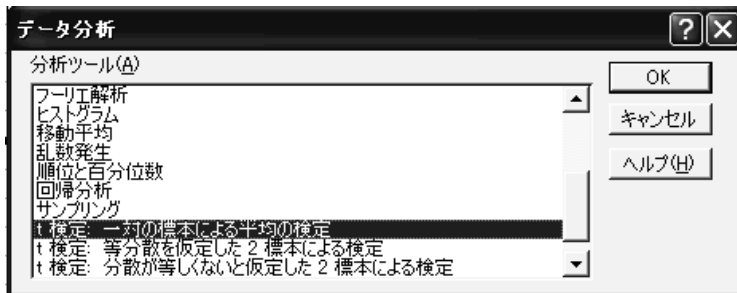
品物 No.	はかり A での値	はかり B での値	重さの差 d
1	427	419	8
2	401	391	10
3	408	410	-2
4	417	406	11
5	416	406	10
6	396	400	-4
7	437	432	5
8	386	391	-5
9	406	402	4
10	402	395	7
平均	409.6	405.2	4.4

前項の対応のないデータでの検定を行うと 5% で有意でないという結果が出る。しかし、A, B のハカリの差を品物ごとにとると何か傾向がありそうだとわかる。このように 2 つの標本のデータが対応する場合、2 つの標本は独立していないといい、対応するデータの対の差 d を検定しなければならない。エクセルの分析ツールでは t 検定：一対の標本による平均の検定を使う。

対応のあるデータの差 d について検定する。

帰無仮説： $H_0: \mu_d = 0$ A と B の 2 つのはかりの指示は同じである。

対立仮説： $H_1: \mu_d \neq 0$ A と B の 2 つのはかりの指示は異なる。



t-検定：二つの標本による平均の検定ツール		
	はかりA での値	はかりB での値
平均	409.6	405.2
分散	226.4889	164.1778
観測数	10	10
ピアソン相関	0.918931	
仮説平均との差異	0	
自由度	9	
t	2.310462	
P(T<=t) 片側	0.023101	
t 境界値 片側	1.833114	
P(T<=t) 両側	0.046202	
t 境界値 両側	2.262159	

p-値が $0.046202 < 5\%$ であるから、有意水準 5% で帰無仮説は棄却され、A、B 2 つのハカリの指示に 5% の有意水準で差があると結論できる。

練習: U 牧場で飼育している牛は晴れの日と雨の日では餌の摂取量 (kg) が違うらしい。10 頭の牛についてそれぞれ晴れの日と雨の日の餌の摂取量を調べたところ、下の表のようになった。牛の餌の摂取量が天気によって異なるのかを有意水準 5% で t 検定せよ。

牛 No.	晴れの日 の摂取量	雨の日の 摂取量	摂取量の差
1	10.6	10.3	0.3
2	11.3	11.2	0.1
3	9.8	9.9	-0.1
4	8.9	9	-0.1
5	12.4	12.1	0.3
6	8.3	8.1	0.2
7	10.5	10.5	0
8	11.4	11.1	0.3
9	9.4	9.2	0.2
10	10.8	10.5	0.3
平均	10.34	10.19	0.15

帰無仮説：

対立仮説：

p-値＝

検定結果：

有意水準 5% で帰無仮説は（ 棄却される ・ 棄却されない ）。

晴れの日と雨の日とで牛の餌の摂取量に（ 差がある ・ 差がない ・ 差があるとはいえない ・ 差がないとはいえない ）。

D. 小標本における統計的推定と検定

1. わずか 2,3 個からなる標本であっても統計的推定と検定は可能である

今回、 t 分布を用いた母平均の推定、検定ともに標本が 2 つしかない場合でも利用できる。標本が少なければ、推定の精度、検定の検出力は劣る。しかし、95%信頼区間の中に 95%の確率で母平均が入ると主張できる。あるいは検定で 5%の有意水準で帰無仮説が棄却できるならば、対立仮説を採用できる。たった標本が 2 つしかないから、統計的にそんなことはいえないはずだということはないのである（ただし標本 2 つで実用的なレベルで推定や検定ができることはほとんどない）。

授業の第 1 回で以下の質問をした。

池の中の魚の体重を知りたい。魚は池に百匹以上はいて、しかも正確な数はわからない。

1) 平均体重が知りたいなら何匹調べたらよいだろうか？

2) 同じ形の池が 2 つあった。しかし、一方は富栄養化していて魚の体重が大きくなったようだ。

この仮説を証明するには 2 つの池からそれぞれ何匹を調べたらよいだろうか？

この答えは t 分布を使った区間推定と t 検定から理解できる。ただし実は何匹調べたらよいかはそのままでは答えられない（参考のために授業用データ集にシミュレーション実験をしたものを掲載した）。じっくりこのような少ない標本を扱うケースを考えてみよう。20 匹ずつ標本をとれば十分であることが予想できそうだ。

2. t 分布による区間推定および t 検定の注意点

① t 分布は正規分布する母集団から得た標本の平均に関する分布である。したがって、 t 分布による区間推定および t 検定をするときには、母集団が正規分布する、あるいは正規分布に近似できることが前提条件である。

正規分布に近似できない母集団であっても、変数の対数、逆数などをとることによって、正規分布に近似できる場合、変数変換してから t 分布による区間推定および t 検定をすることができる（第 5 回の授業参照）。

② 2 つの独立した母集団の母平均に差があるかどうかを検定する t 検定の場合、2 つの母集団が正規分布することおよび 2 つの母集団の母分散が等しいことの 2 つが前提となっている。しかし、実際には標本数がほぼ同じ場合には母分散が異なってもそれほど検定に問題がないことがわかっている。したがって、母分散が異なっており、標本数も大きく異なる（おおむね 2 倍以上）場合にはこの方法を用いると問題がある。この場合には Welch の検定を使う。

なお母分散に差があるかどうかを検定する方法は F 検定といい、次回、学ぶ予定である。Welch の検定はこのプリントの最後に参考として載せておく。

E. 宿題

宿題はホームページ <http://www.ipc.shimane-u.ac.jp/food/kobayasi/biometrysyukudai.html> を見てください。

参考：Welch の検定

2つの標本の標本数が大きく異なり（おおむね2倍以上）、かつ分散も異なる場合には2つの独立した母集団の母平均に差があるかを検定するときt検定を使うと間違った結論を得る可能性が大きくなる．そこでこの場合、Welch の検定を使う

今回のプリント P5 で使った練習問題を使って、Welch の検定を行う．

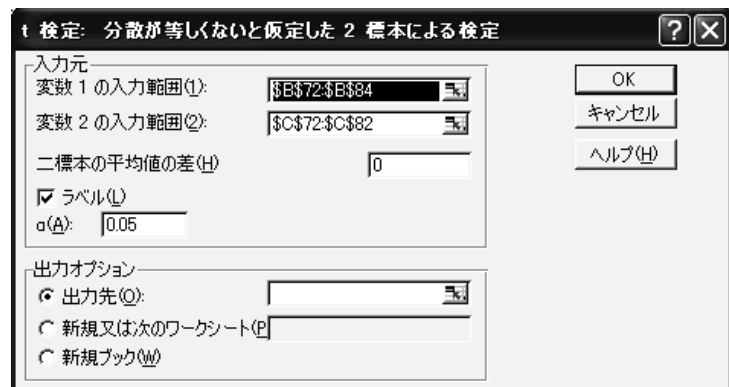
練習：A地区とB地区それぞれ地区ぐるみで健康のために減塩に取り組んだ．無作為に選んだ標本から摂取食塩量を調査した．その結果は右下の表のようになった．食塩摂取量に差はあるのかを検定せよ．

	A地区	B地区
	6.0	5.6
	6.2	6.4
	5.8	6.8
	5.6	6.6
	6.0	6.0
	5.9	5.8
	6.4	6.2
	6.8	6.6
	5.4	5.9
	5.8	6.3
	6.2	
	6.4	

1. エクセルの分析ツールから分散が等しくないと仮定した2標本による検定を選ぶ



2. データの範囲を入力する．



3. 検定結果は右の通りとなった．したがって、p-値は 0.14 なので5%の有意水準では帰無仮説は棄却できない．したがって、両地区の食塩摂取量に差があるとはいえないと結論される．この場合の p-値は分散が等しいと仮定した場合の p-値である 0.295 とほとんど変わらなかった．

t-検定：分散が等しくないと仮定した2標本による検定			
	A地区	B地区	
平均	6.041667	6.22	
分散	0.148106	0.152889	
観測数	12	10	
仮説平均と	0		
自由度	19		
t	-1.07284		
P(T<=t) 片	0.148391		
t 境界値 片	1.729131		
P(T<=t) 両	0.296782		
t 境界値 両	2.093025		