

第4回 二項分布, ポアソン分布, 正規分布

A. 代表的な離散分布

1. 二項分布

① 二項分布

大きさ n の標本で, 事象 E の起こる確率を p とするとき, そのうち x 個に E が起こる確率 $P(x)$ は二項分布に従う.

例 さいころを 10 回振ったときに 1 の出る回数 x の確率分布は二項分布に従う.

この場合, $n = 10, p = \frac{1}{6}$ の二項分布になる

さいころを 10 回振ったときに 1 が 0 回出る ($x = 0$) 確率は, $P(0) = 0.162$ である.

さいころを 10 回振ったときに 1 が 3 回出る ($x = 3$) 確率は, $P(3) = 0.155$ である.

★ 二項分布では母平均 $\mu = np$, 母分散 $\sigma^2 = np(1-p)$ となる.

エクセルでの計算

例 さいころを 10 回振ったときに 1 の出る回数 x の確率分布は二項分布に従う.

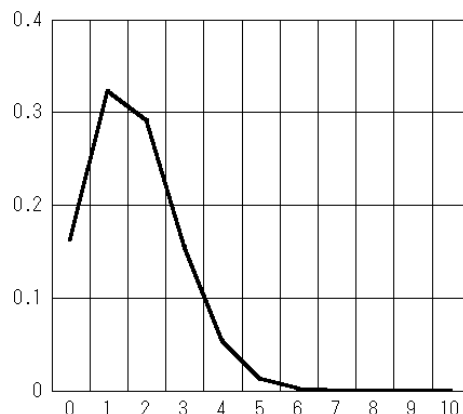
$n = 10, p = \frac{1}{6}$ の二項分布になる

エクセルでは $P(x) = \text{BINOMDIST}(x, n, p, \text{false})$

例をエクセルで計算すると以下の通りになる.

さいころの場合		
1 の出る回	確率	エクセルの二項分布関数
0	0.161506	=BINOMDIST(0,10,1/6,FALSE)
1	0.323011	=BINOMDIST(1,10,1/6,FALSE)
2	0.29071	=BINOMDIST(2,10,1/6,FALSE)
3	0.155045	=BINOMDIST(3,10,1/6,FALSE)
4	0.054266	=BINOMDIST(4,10,1/6,FALSE)
5	0.013024	=BINOMDIST(5,10,1/6,FALSE)
6	0.002171	=BINOMDIST(6,10,1/6,FALSE)
7	0.000248	=BINOMDIST(7,10,1/6,FALSE)
8	1.86E-05	=BINOMDIST(8,10,1/6,FALSE)
9	8.27E-07	=BINOMDIST(9,10,1/6,FALSE)
10	1.65E-08	=BINOMDIST(10,10,1/6,FALSE)

上の結果をグラフで示すと右のようになる.



練習 A社のチョコレートにはくじが入っていて、当たる確率は0.15である。10個買って1つも当たりが入っていない確率、2つだけ当たりの入っている確率を求めよ。さらに下の表を完成させよ。

$n =$, $p =$

当たりの数	エクセルでの計算式	確率
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

② 二項分布の利用

二項分布すると考えられる場合、それを利用していくつかの予測や推論を立てることができる。

(1) 確率の計算

例：シロクマチョコレートを買うと、20個に1個の割合でシロクマのぬいぐるみが当たる。どうしてもシロクマのぬいぐるみがほしいAさんはシロクマのぬいぐるみが手に入る確率を95%以上にするにはいくつシロクマチョコレートを買えばよいか？99%以上にするにはいくつ買えばよいか？

95%以上の確率にするにはいくつ買えばよいか？

求める確率 = 1 - (ひとつもシロクマのぬいぐるみが当たらない確率) である。

99%以上の確率にするにはいくつ買えばよいか？

(2) 真偽を推測する

例：シロクマチョコレートを買うと、20個に1個の割合でシロクマのぬいぐるみが当たる。どうしてもシロクマのぬいぐるみがほしいAさんはシロクマチョコレートを50個買ったのに1つも当たらなかった。Aさんはシロクマチョコレート株式会社はうそつきだと断定した。しかし、その推論は正しいか？

50個シロクマチョコレートを買っても1つもシロクマのぬいぐるみが当たらない確率は二項分を利用すると（ ）である。

この確率はあまりにも小さいから不自然なのでシロクマチョコレート株式会社は嘘をついたと判断できるだろうか？あるいはたまには起きそうなことなので嘘をついたとは断言できないだろうか？

20個に1個の割合でシロクマのぬいぐるみが当たるのだから20個買うと1個は当たりそうにふつうの人は期待する。しかし、20個シロクマチョコレートを買って、ぬいぐるみが1個当たる確率は（ ）である。これほど確率が低いのは20個シロクマチョコレートを買って、2個以上当たる幸運な人がいるからで、その確率は（ ）である。

このように確率分布を使うと標本（この場合、数を決めて購入したシロクマチョコレートのくじ）から母集団（シロクマチョコレート株式会社を作るすべてのシロクマチョコレートのくじ）について推論することができる。このような確率分布を利用した推論（推定と検定）については第6回以降の授業で学ぶ。

2. ポアソン分布

① ポアソン分布

ポアソン分布は一定の長さの時間、一定の大きさの空間においてごくまれに起こる事象を表現するときに用いる。二項分布において p をどんどん小さくする一方で、 n を無限大にすると得られる。非常に大きな集団においてきわめて起こりにくい事象を対象としたときの分布である。

二項分布と違って、分布の大きさ n は必要ない。例えば、交通事故死はきわめてまれなものである。その対象となる n はしかも何人か決めようがない。運転者や歩行者の数は毎日異なるからである。そういうときにポアソン分布は有効である。

例 ある島では毎年、何千羽ものヒナが生まれる。毎年平均 0.5 羽の出現率で黄金色の羽をもつヒナが生まれるという。 $\mu = 0.5$ であるから、黄金の羽を持つヒナが 0,1,2 羽、出現する確率はそれぞれポアソン分布に従う。(ここでは毎年それぞれ誕生するヒナの数が何千羽であるかを正確にわかっていなくてもよいし、異なっていたとしてもよい。そこが二項分布と違う。)

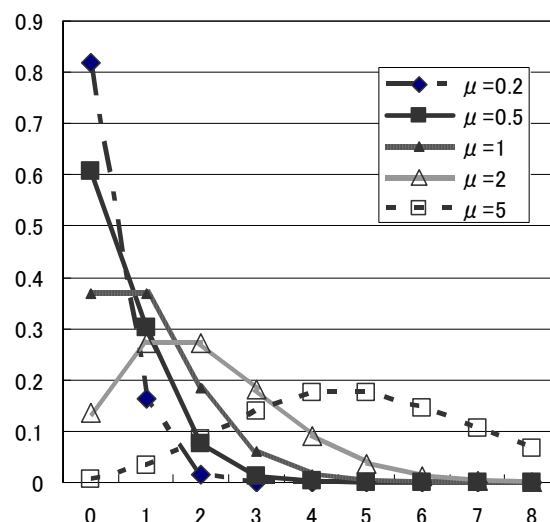
ポアソン分布の計算には母平均だけが必要である。ここでは母平均 $\mu = 0.5$ である。

エクセルでは、 $P(x) = POISSON(x, \mu, false)$

黄金色の羽をもつヒナの数	確率	エクセルでの式
0	0.606531	=POISSON(0,0.5,FALSE)
1	0.303265	=POISSON(1,0.5,FALSE)
2	0.075816	=POISSON(2,0.5,FALSE)

★ ポアソン分布では平均 μ が決まると分布の形が決まる。

★ ポアソン分布では、母平均 μ と母分散 σ^2 は等しい。



練習 A君は1時間、夜空を見上げると流れ星を平均 0.4 個みるという。ポアソン分布に従うとすれば、1時間で流れ星を 0, 1, 2 個見る確率を計算せよ。

$\mu =$

当たりの数	エクセルでの計算式	確率
0		
1		
2		

B. 連続分布

1. 一様分布 (矩形分布) すべてが同じ確率で起こる分布

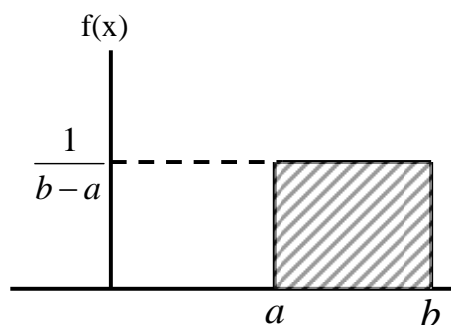


図 一般的な一様分布

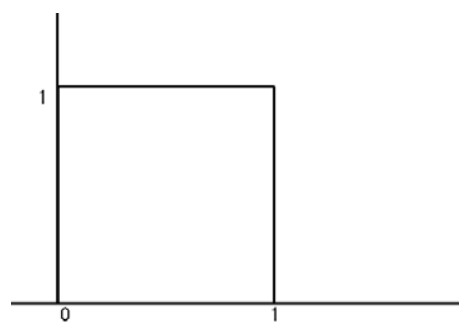
右の確率分布において

確率変数が 0 となる確率は？

確率変数が 1 となる確率は？

確率変数が 0~0.1 となる確率は？

確率変数が 0~1 となる確率は？

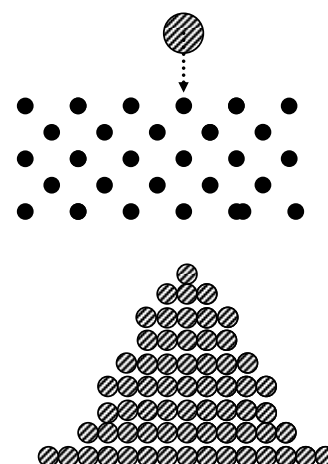


一様分布 (矩形分布) の例

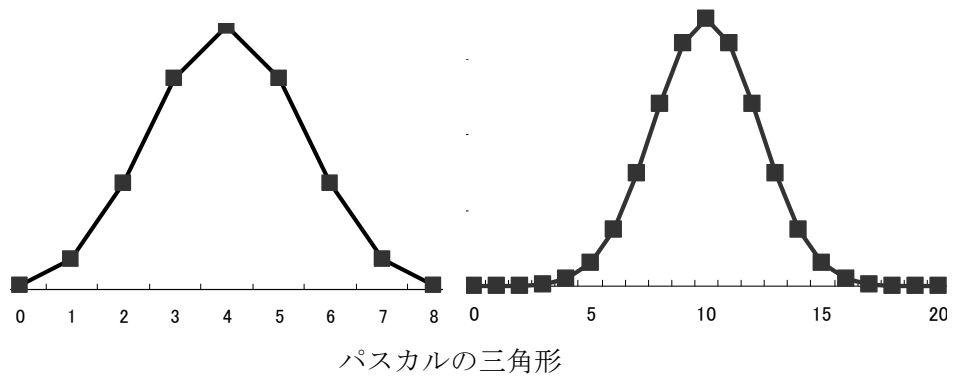
2. 正規分布

二項分布で $p = 0.5$ としたときに n を無限大にするとえられる。

たくさんのランダムなことが組み合わさった場合に $p = 0.5$ の二項分布の極限である正規分布となるとみなすことができる。例えば、概念的には、パチンコ台での球の分布を見ると釘に当たり右と左に行く確率は同じだとすれば、球の分布は図のようになる。これは二項分布に従う (パスカルの三角形: $n = 8$, $p = 0.5$ の場合と $n = 20$, $p = 0.5$ の場合)。



パチンコ台での玉の分布



★ 正規分布に（近似的に）従う事象はたくさんある。

人の身長分布、犬の体重、卵の重さなどの分布は正規分布に近似できる。

C. 宿題

宿題はホームページ <http://www.ipc.shimane-u.ac.jp/food/kobayasi/biometrysyukudai.html> を見てください。